

NÂNG CAO CHẤT LƯỢNG GIẢNG DẠY HỌC PHẦN TOÁN HỌC CAO CẤP THÔNG QUA CÁC BÀI TOÁN CÓ TÍNH ỨNG DỤNG TRONG NGHỀ NGHIỆP CỦA SINH VIÊN Ở TRƯỜNG ĐHSPTK

Ths. Ngô Tất Hoạt
ĐHSPTK Vinh

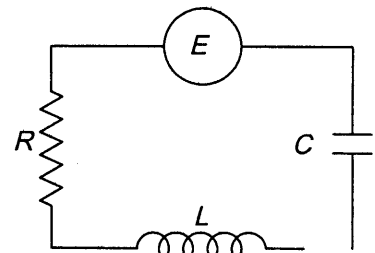
Trong quá trình giảng dạy học phần Toán học cao cấp ở trường ĐHSPTK, tôi nhận thấy rằng nếu các giảng viên có thể đưa ra các bài toán có liên quan đến các ngành nghề mà sinh viên đang theo học thì giờ học trở nên rất lý thú và được các sinh viên đón nhận rất hồ hởi và tránh được sự cứng nhắc trong giờ học toán. Vì vậy trong bài báo này tôi sẽ đưa ra một vài ứng dụng của phương trình vi phân có liên quan đến các lĩnh vực trong khoa học và kỹ thuật.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Mạch điện

Một mạch điện mắc nối tiếp (hình 1) gồm có:

- (1) Một bình ắc quy hoặc một máy phát điện cung cấp một lực điện từ hoặc một thế điện động (vôn thế hoặc điện thế) E vôn.
- (2) Một cuộn cảm có độ tự cảm L Henri.
- (3) Một tụ điện có điện dung C Fara.
- (4) Một điện trở có kháng trở R ôm.



Hình 1

Cường độ dòng điện I (tính bằng Ampe) bằng vận tốc thay đổi tức thời theo thời gian của điện tích Q (tính bằng Culông) trên tụ điện, tức là $I = dQ/dt$.

Áp dụng các công thức điện học ta được các kết quả :

Điện thế ở hai đầu điện trở bằng IR .

Điện thế ở hai đầu cuộn cảm bằng LdI/dt .

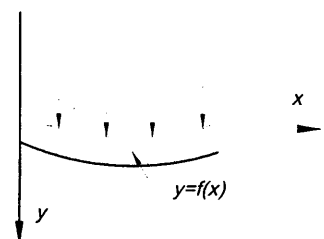
Điện thế ở hai đầu tụ điện bằng Q/C .

Định luật Kirchhoff:

- Tổng đại số các dòng điện đi vào và đi ra tại một nút mạch bằng 0.
- Tổng đại số các hiệu điện thế trong một mạch kín bằng 0.

1.2. Cơ học

Định luật cơ học hoặc là định luật động lực học cơ bản là định luật Newton, tức là: $F = \frac{d}{dt}(mv)$, ở đây m là khối lượng vật thể đang chuyển động, t là thời gian và F là hợp



Hình 2

lực tác dụng lên vật. Đại lượng mv được gọi là động lượng.

Nếu m bằng hằng số thì phương trình trên trở thành $F = m \frac{dv}{dt} = ma$, a là gia tốc.

Trên bề mặt hoặc gần bề mặt trái đất, khối lượng m liên hệ với trọng lượng w theo biểu thức $m = w/g$; g là gia tốc trọng trường.

1.3. Độ võng của dầm

Một dầm nằm ngang hướng theo trục x của hệ tọa độ xy được đặt trên nhiều gối đỡ khác nhau sẽ chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng. Đường cong độ võng của dầm thường gọi là đường cong đàn hồi (hình 2) xác định theo phương trình $y = f(x)$, ở đây y là đoạn võng xuống so với trục nằm ngang.

Đường cong trên có thể xác định được từ phương trình $\frac{Ey''}{(1+y'^2)^{3/2}} = M(x)$

với $M(x)$ là mômen uốn ở x và bằng tổng đại số mômen của tất cả các lực nằm một phía đối với x . Các mômen được xem là dương khi các lực hướng theo hướng y dương và được xem là âm nếu ngược lại. Vì độ võng y' nhỏ nên ta có thể lấy

$$EIy'' = M(x).$$

Đại lượng EI với E là môđun đàn hồi Young và I là mômen quán tính của diện tích mặt cắt ngang dầm đối với trục đi qua trọng tâm của nó được gọi là độ cứng của dầm, đại lượng này thường là hằng số.

2. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1 (ứng dụng trong mạch điện).

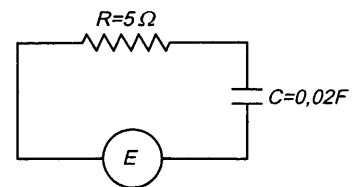
Một điện trở $R = 5 \Omega$ và một tụ điện $C = 0,02 \text{ F}$ mắc nối tiếp với một ắc quy $E = 100\text{v}$ (hình 3). Nếu ở $t = 0$ điện tích Q trên tụ bằng $5C$, tìm Q và dòng điện I khi $t > 0$.

Giải.

Điện thế ở hai đầu $R = 5I = 5dQ/dt$.

Điện thế ở hai đầu $C = Q/0,02 = 50Q$.

Điện thế ở hai đầu $E = -E$



Hình 3

Theo định luật Kirchoff ta có $5dQ/dt + 50Q = E$.

Nếu $E = 100\text{v}$, $dQ/dt + 10Q = 20$; $\frac{d}{dt}(e^{10t}Q) = 20e^{10t}$. Khi đó ta lấy tích phân và giải theo $Q = 5C$ ở $t = 0$, ta tìm được $Q = 2 + 3e^{10t}$ và $I = dQ/dt = 30 e^{10t}$

Ví dụ 2 (ứng dụng trong cơ học)

Một vật được ném thẳng đứng từ dưới mặt đất với vận tốc đầu 1960m/s . Bỏ qua lực cản không khí, hãy tính:

- Chiều cao cực đại đạt được.
- Toàn bộ thời gian đã mất để vật quay về điểm ban đầu.

Giải.

Xét vật có trọng lượng m ở vị trí có khoảng cách x tính từ mặt đất sau khoảng thời gian t giây (hình 4). Chọn hướng thẳng đứng từ dưới lên là hướng dương. Theo định luật Newton:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \text{ hoặc } \frac{d^2x}{dt^2} = -g = -980 \quad (1)$$

Theo giả thiết ban đầu $x = 0$; $dx/dt = 1960$ tại $t = 0$.

Giải (1) theo điều kiện đầu ta có $x = 1960t - 490t^2$.

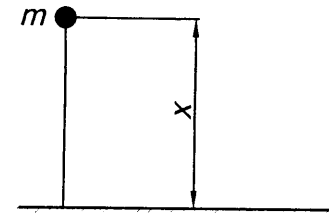
a. Chiều cao đạt cực đại khi $dx/dt = 1960 - 980t = 0$ hay

$$t = 2. \text{ Khi đó } x = 1960 \cdot 2 - 490 \cdot 2^2 = 1960.$$

Vậy chiều cao cực đại đạt được là 1960 cm.

b. $x = 0$ khi $t(1960 - 490t) = 0$ hay là $t = 0,4$.

Vì vậy thời gian cần thiết để quay về là 4 giây.



Hình 4

Ví dụ 3 (ứng dụng trong bài toán uốn dầm).

Một dầm có chiều dài L gối lên hai gối tựa đơn ở hai đầu (hình 5)

a. Tính độ võng của dầm có trọng lượng không đổi W trên đơn vị chiều dài.

b. Xác định độ võng cực đại.

Giải.

a) Toàn bộ trọng lượng của dầm là WL . Vì vậy mỗi đầu chịu một trọng lượng là $\frac{1}{2}WL$.

Gọi x là khoảng cách tính từ đầu trái A của dầm. Để tìm mômen uốn M ở x , ta xét các lực đặt bên trái x .

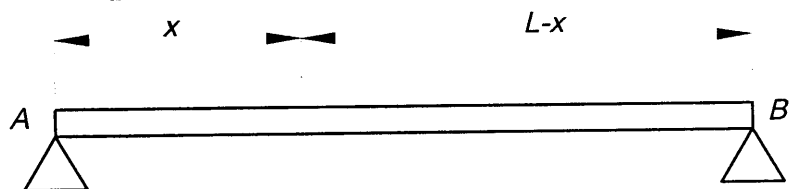
(1) Lực $\frac{1}{2}WL$ ở A có mômen bằng $-(\frac{1}{2}WL)x$.

(2) Lực do trọng lượng dầm bên trái x là Wx và có mômen là $Wx(x/2) = \frac{1}{2}Wx^2$.

Khi đó mômen uốn toàn bộ ở x là $\frac{1}{2}Wx^2 - \frac{1}{2}WLx$.

Suy ra

$$EIy'' = \frac{1}{2}Wx^2 - \frac{1}{2}WLx$$



Hình 5

Giải phương trình trên với $y' = 0$ ở $x = L/2$ (do tính chất đối xứng) và $y = 0$ ở $x = 0$, ta có $y = \frac{W}{24EI}(x^4 - 2Lx + L^3x)$

Nếu dùng các điều kiện $y = 0$ ở $x = 0$ và $x = L$ ta cũng thu được kết quả trên.

b) Độ võng cực đại ở $x = L/2$ và bằng $5WL^4/384EI$

Nếu ở trên ta xét các lực nằm bên phải của x thì tổng mômen uốn ở x sẽ là

$$-\frac{1}{2}WL(L-x) + W(L-x)\left(\frac{L-x}{2}\right) = \frac{1}{2}Wx^2 - \frac{1}{2}WLx$$

Ta có kết quả tương tự như trên.

Tài liệu tham khảo:

- [1] Đỗ Công Khanh, *Giáo trình giải tích toán học, tập 3: Chuỗi và phương trình vi phân*, (Dùng cho sinh viên các ngành kỹ thuật), Tủ sách trường ĐH đại cương TP.Hồ Chí Minh, 1998.
- [2] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp, tập 3, phép tính giải tích nhiều biến số*, nhà xuất bản Giáo dục, 2005.
- [3] Ngô Thu Lương, Nguyễn Minh Hằng, *Bài tập toán cao cấp 4, chuỗi và phương trình vi phân*, toán cao cấp dùng cho sinh viên các ngành kỹ thuật, Tủ sách trường ĐH đại cương TP.Hồ Chí Minh, 1998.
- [4] Lê Văn Hạp, *Giáo trình Phương trình Vi phân và Đạo hàm riêng*, Huế, 2001.
- [5] P.E. Đankô, A.G. Popôp, T.La. Côgiêphicôva, *Bài tập Toán học cao cấp*, phần II.
Người dịch: Lê Đình Thịnh, Lê Trọng Vinh, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà Nội 1983.