

## ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU HỆ CON LẮC NGƯỢC BỐN BẬC OPTIMAL CONTROL FOR QUADRUPLE INVERTED PENDULUM

Nguyễn Văn Đông Hải, Nguyễn Phong Lưu, Nguyễn Minh Tâm, Hoàng Ngọc Văn  
 Trường đại học Sư phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh

Ngày tòa soạn nhận bài 14/9/2015, ngày phản biện đánh giá 28/9/2015, ngày chấp nhận đăng 15/10/2015

### TÓM TẮT

Con lắc ngược là một đối tượng SIMO (hệ một vào nhiều ra) quen thuộc trong các việc kiểm chứng giải thuật điều khiển tự động. Với số bậc càng cao, một đầu vào điều khiển của hệ con lắc ngược càng điều khiển nhiều số đầu ra. Việc này dẫn đến khó khăn trong việc điều khiển ổn định con lắc nhiều bậc. Bài báo trình bày giải thuật điều khiển tối ưu (LQR) trong việc giữ ổn định cho hệ con lắc ngược theo phương thẳng đứng. Kết quả mô phỏng trên Matlab/Simulink cho thấy hệ thống ổn định tốt không những quanh vị trí thẳng đứng hoàn toàn mà cả ở vị trí làm việc khác.

**Từ khóa:** Con lắc ngược, điều khiển tối ưu, LQR, Matlab, Simulink.

### ABSTRACT

Inverted pendulum is a SIMO model (single-input and multi-output) which is popular in testing automatic control algorithm. The more degrees of freedom that an inverted pendulum system has, the more outputs that an input of the system has to control. This makes difficulties in controlling multilink inverted pendulum. This paper presents optimal control algorithms (LQR) in balancing the system in vertical upward-position. Matlab/Simulink simulation results show that the system is stabilized well around the absolute upward-position and also around other working points.

**Keywords:** Inverted Pendulum, Optimal control, LQR, Matlab, Simulink

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ổn định cho hệ con lắc ngược là một bài toán quen thuộc trong điều khiển tự động. Tuy nhiên, các nghiên cứu đa phần chỉ dừng ở các con lắc bậc thấp như bậc một như ở [1], bậc hai như ở [7], [8] hoặc bậc ba như ở [9], [10]. Tuy nhiên, không có nhiều nghiên cứu về con lắc ngược từ bậc bốn trở lên. Simon Lam và Edward J. Davison [2] đã đưa ra được phương trình tương ứng cho con lắc ngược n-bậc nhưng chưa đưa ra giải thuật điều khiển tương ứng. Các tác giả Igor Ananyeski và Nikolay Anokhin [3] đã điều khiển ổn định thành công hệ nhiều bậc nhưng kết quả chỉ dừng ở bậc ba và chưa đưa ra được kết quả tại nhiều điểm làm việc khác nhau.

Dựa trên nền tảng mô hình con lắc ngược nhiều bậc của [2] và [3], nhóm tác giả xét riêng với trường hợp con lắc ngược bốn bậc và nghiên cứu xây dựng bộ điều khiển

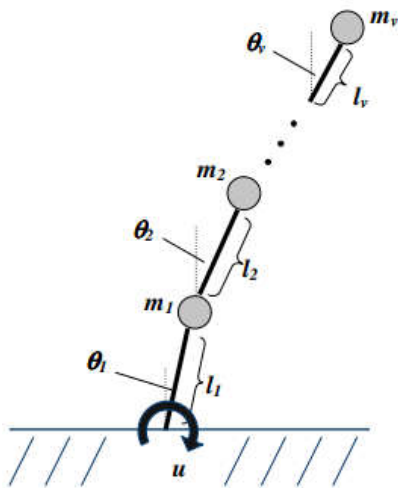
LQR cho hệ trên. Nếu thông số hệ thống và phương trình toán học được xác định rõ ràng thì điều kiện ổn định của giải thuật LQR sẽ được đảm bảo thông qua toán học từ việc giải phương trình Ricatti [5]. Ngoài ra, không như điều khiển PID thường chỉ áp dụng tốt được cho hệ SISO, giải thuật LQR có thể điều khiển các hệ MIMO, SIMO... nếu thỏa mãn điều kiện của ma trận điều khiển  $M_c$  được sẽ được đề cập ở (11). Một số tác giả ở [7], [9] đã điều khiển được các hệ con lắc ngược ở các bậc thấp hơn là bậc hai và bậc ba. Và thông qua các mô phỏng của bài báo này, các tác giả chứng tỏ hệ con lắc ngược bốn bậc vẫn có thể được điều khiển tốt thông qua giải thuật điều khiển tối ưu.

Các mục tiếp theo của bài báo được trình bày theo thứ tự sau: Mục II trình bày mô hình toán học hệ con lắc ngược bốn bậc và quá

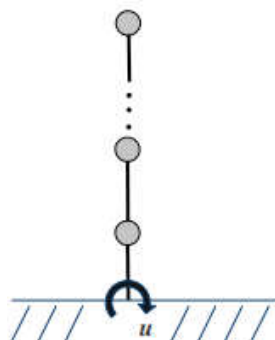
trình tuyến tính hóa hệ thống. Mục III trình bày cách thức xây dựng một bộ điều khiển LQR tổng quát và áp dụng giải thuật đó cho hệ con lắc ngược bốn bậc. Mục IV trình bày kết quả mô phỏng của thuật toán được đề xuất cho hệ con lắc ngược bốn bậc. Phần kết luận được trình bày trong Mục V của bài báo..

## 2. MÔ HÌNH TOÁN HỌC

Hệ con lắc ngược nhiều bậc được xét ở đây có nhiều link (thanh khớp nối). Trong đó, link 1 được gắn với trục quay một động cơ. Do đó, link 1 không được tính là một bậc của con lắc ngược. Bậc 1 tương ứng với link 2, tương tự, bậc 2 tương ứng với link 3... Mỗi thanh link xem như có khối lượng không đáng kể. Khối lượng tương ứng với mỗi link được tập trung vào 1 đầu nặng được gắn giữa link đó và một link khác ở bậc cao hơn. Việc điều khiển các link2, link3,... được thực hiện nhờ việc động cơ quay, tạo momen tác động vào link 1. Nếu chỉ sử dụng 2 link thì hệ con lắc ngược nhiều bậc sẽ trở về dạng mô hình Pendubot thường được sử dụng [9].



Hình 1. Mô hình con lắc ngược nhiều bậc



Hình 2. Điểm làm việc thẳng đứng hoàn toàn

Theo tài liệu [2], ta có phương trình toán học mô tả hệ thống con lắc ngược có  $v$  link:

$$G(x) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_v \end{bmatrix} = F(x, u) \quad (1)$$

$$G_{ij} = \left( \sum_{k=\max(i,j)}^v m_k \right) l_j \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (2)$$

$$F_i = \sum_{k=1}^v \left\{ \left( \sum_{h=\max(k,i)}^v m_h \right) l_k \sin(\theta_k - \theta_i) \dot{\theta}_k^2 \right\} + \left( \sum_{k=1}^v m_k \right) g \sin \theta_i + \delta_{i1} \times \frac{1}{l_1} u \quad (3)$$

$$\text{Với } i, j=1, 2, \dots, v \text{ và } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (4)$$

Và với hệ con lắc ngược bốn bậc thì ta có  $v = 5$ .

Sau đó, qua việc đặt biến trạng thái:

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10}]^T$$

$$= [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_2 \ \theta_3 \ \dot{\theta}_3 \ \theta_4 \ \dot{\theta}_4 \ \theta_5 \ \dot{\theta}_5]^T \quad (5)$$

Và tính toán Matlab, ta đưa (1) về dạng:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{10}, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_{10}, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_{10} = f_{10}(x_1, x_2, \dots, x_{10}, u) \end{cases} \quad (6)$$

Tiếp tục tuyến tính hóa hệ thống quanh điểm làm việc tĩnh:

$$x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (7)$$

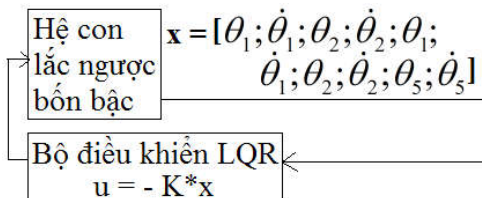
Lúc này, (6) trở thành dạng: 
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = x \end{cases} \quad (8)$$
 Với ma trận trọng số là:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{10}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=0}} \quad (9)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \dots & \frac{\partial f_{10}}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=0}}^T \quad (10)$$

#### 4. GIẢI THUẬT ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Bộ điều khiển tối ưu (LQR) được diễn tả thông qua sơ đồ sau:



Hình 3. Sơ đồ bộ điều khiển LQR cho hệ con lật ngược bốn bậc

Theo [5], một hệ thống sẽ điều khiển LQR tại điểm làm việc nếu ma trận A, B của hệ thống đó, ứng với phương trình trạng thái đã tuyến tính hóa quanh điểm làm việc ở (8) thỏa mãn điều kiện:

Với ma trận điều khiển

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^nB]$$

và n là số biến trạng thái hay số bậc của A

$$\text{thì } \text{rank}(M_c) = n \quad (11)$$

Trong đó, ma trận K được tính từ việc giải phương trình Ricatti [5] thông qua việc có sẵn các ma trận A, B và việc chọn lựa các ma trận trọng số Q, R:

$$A^T P A - P - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q + P = 0 \quad (12)$$

Với hàm mục tiêu được chọn là:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (13)$$

Thông qua việc giải (12) để có được nghiệm P, ta tiếp tục tìm ma trận hồi tiếp K qua biểu thức:

$$K = [B^T P B + R]^{-1} B^T P A \quad (14)$$

Ở đây, bài báo sử dụng công cụ Matlab để giải phương trình Ricatti thông qua lệnh:

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R) \quad (15)$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{10} \end{bmatrix}; R = r \quad (16)$$

Các giá trị trọng số  $q_i$  có giá trị dương, tương ứng với việc điều chỉnh các biến số  $x_i$ . Việc chọn trọng số  $q_i$  căn cứ trên cơ sở xem xét sự ổn định của biến  $x_i$  tương ứng. Để ưu tiên thông số nào ổn định, ta tăng trọng số tương ứng biến ấy. Tuy nhiên, việc tăng toàn bộ trọng số sẽ lại khiến không có biến nào được ưu tiên ổn định.

Ma trận trọng số R trong trường hợp này chỉ là một số thực dương vì hệ thống chỉ có một biến ngõ vào u. Ma trận R càng lớn tương ứng với việc càng ưu tiên cho việc ổn định tín hiệu ngõ vào điều khiển. Việc giảm R sẽ làm tín hiệu điều khiển dao động hơn. Tuy nhiên, việc tăng R quá mức sẽ làm tín hiệu điều khiển thay đổi quá chậm để kịp đáp ứng hệ thống.

Chọn thông số hệ thống lần lượt như

$$\text{sau: } m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 0.04(\text{kg}) \text{ và } l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 0.2(\text{m}) \quad (17)$$

Với các thông số hệ thống như trên thì

ma trận trọng số lần lượt là: với các thông số hệ thống như trên thì ma trận trọng số lần lượt là:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Trong đó, các thành phần của ma trận A là:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 245.25 & 0 & -196.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -245.25 & 0 & 392.4 & 0 & -147.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -98.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 196.2 & 0 & -49.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -98.1 & 0 & 98.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -196.2 & 0 & 294.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -147.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Và các thành phần của ma trận B là:

$$B_1 = [0 \quad 625 \quad 0 \quad -625 \quad 0]^T$$

$$B_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Với ma trận A, B như ở (18) và (19), và từ  $M_C$  ở (11), ta tính ra được:

$$\text{rank}(M_C) = 8 \quad (20)$$

Như vậy, sẽ tồn tại ma trận hồi tiếp K để điều khiển các biến hệ thống về điểm làm việc cho trước.

Trong ma trận Q, R ở (16), ta chọn:

$$\begin{aligned} q_1 = 500, \quad q_2 = 40, \quad q_3 = 600, \quad q_4 = 5, \\ q_5 = 300, \quad q_6 = 500, \quad q_7 = 400, \quad q_8 = 800, \\ q_9 = 200, \quad q_{10} = 300 \quad \text{và} \quad r = 800 \end{aligned} \quad (21)$$

Sử dụng Matlab để tính ma trận K, ta có:

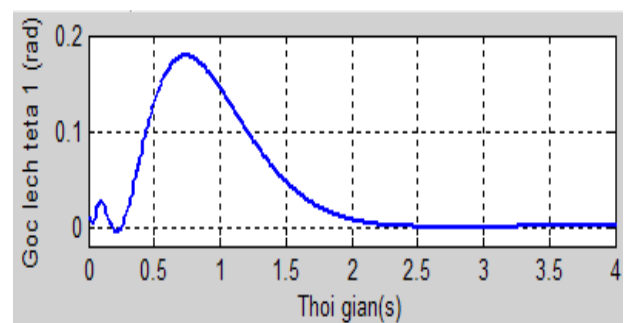
$$K = [1.2455 \quad 1.1025 \quad -35.116 \quad 0.6841 \quad 281.7628 \quad 9.6384 \quad -614.8758 \quad -32.2761 \quad 401.0518 \quad 35.4611] \quad (22)$$

#### 4. KẾT QUẢ MÔ PHỎNG

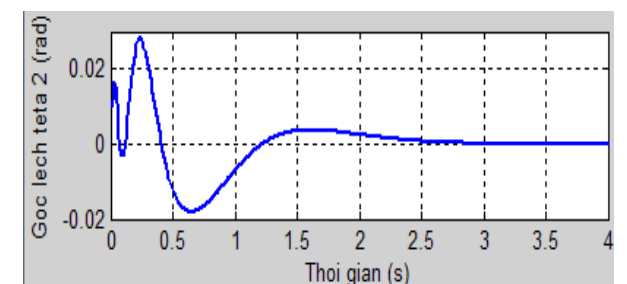
Ta chọn giá trị đầu như sau:

$$x\_limit = [0.01 \quad 0 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0.01 \quad 0 \quad 0.01 \quad 0]$$

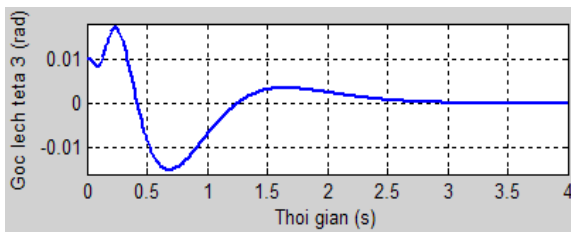
**4.1. Trường hợp 1:** Điều khiển cả năm link ở vị trí thẳng đứng



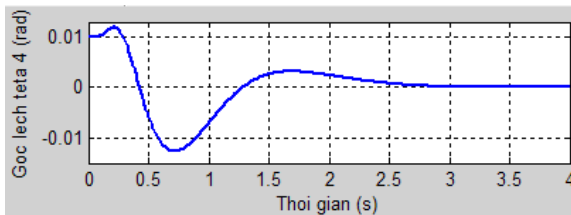
Hình 4. Góc lệch của link 1 (rad)



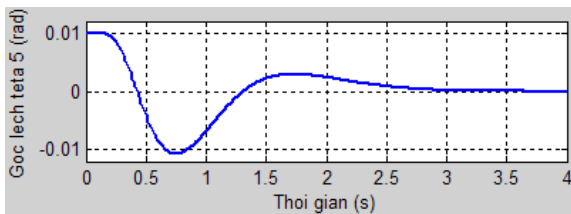
Hình 5. Góc lệch của link 2 (rad)



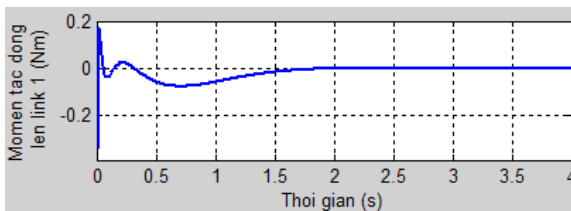
Hình 6. Góc lệch của link 3 (rad)



Hình 7. Góc lệch của link 4 (rad)



Hình 8. Góc lệch của link 5 (rad)

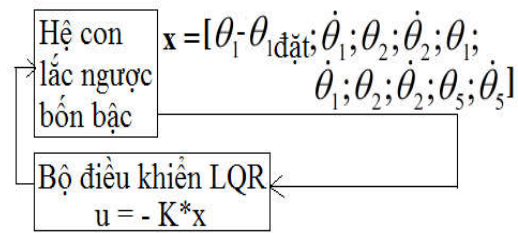


Hình 9. Momen tác động vào link 1 (Nm)

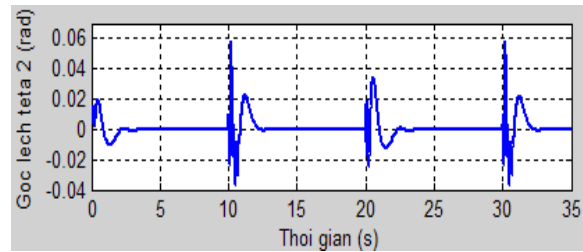
### Nhận xét:

Ta thấy bộ điều khiển với thông số K tìm được ở (22) với các ma trận trọng số Q, R ở (16) cho kết quả điều khiển rất tốt. Tất cả các góc tương ứng với các link đều về vị trí  $x_0$  (tất cả các link đều nằm ở vị trí thẳng đứng hướng lên) trong khoảng thời gian chưa đầy 3s. Momen tác động vào link 1 cũng nhanh chóng ổn định về giá trị 0 sau chưa đầy 3s, tức không cần cấp momen điều khiển khi con lắc đã ở vị trí cân bằng ổn định.

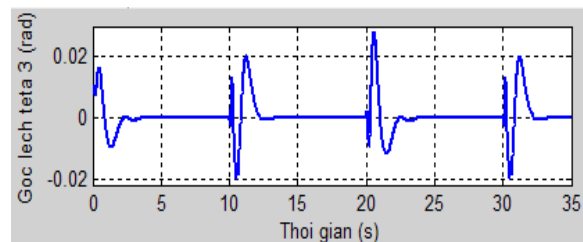
**4.2. Trường hợp 2:** Điểm làm việc thay đổi tương ứng với sự thay đổi giá trị đặt của góc  $\theta_1$  trong hình 16.



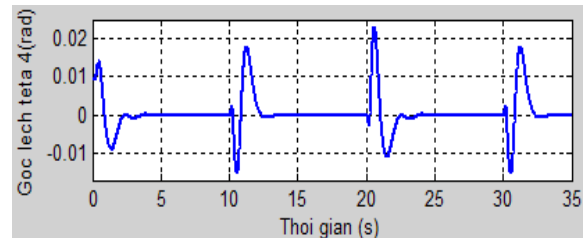
Hình 10. Sơ đồ bộ điều khiển với điểm làm việc thay đổi



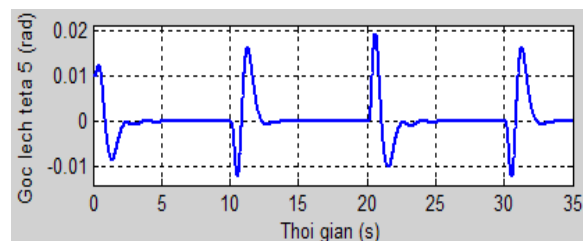
Hình 11. Góc lệch của link 2 (rad)



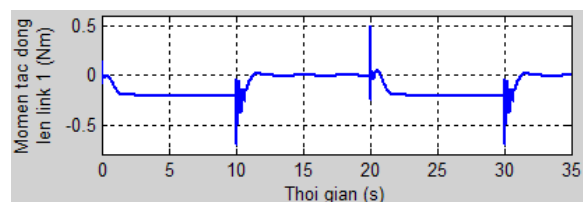
Hình 12. Góc lệch của link 3 (rad)



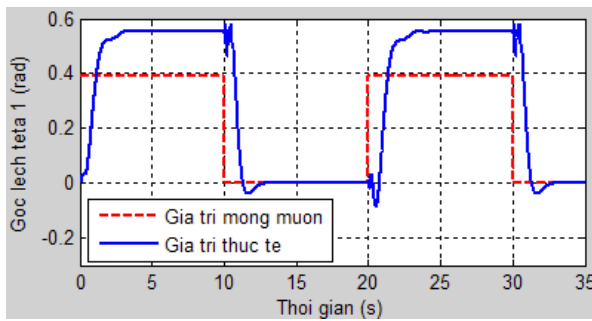
Hình 13. Góc lệch của link 4 (rad)



Hình 14. Góc lệch của link 5 (rad)



Hình 15. Momen tác động vào link 1 (Nm)



Hình 16. Góc lệch của link 1(rad)

**Nhận xét:**

Các giá trị  $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  đều nhanh chóng ổn định sau mỗi 4s sau khi vị trí đặt bị thay đổi. Tuy nhiên, giá trị  $\theta_1$  chưa bám sát hẳn được giá trị đặt khi giá trị đặt ở xa quá vị trí 0. Đó là vì khi xây dựng bộ điều khiển LQR ở Phần III, ta tuyến tính hóa hệ thống quanh điểm làm việc  $x_0$  và thông số K xây dựng được

cũng đảm bảo ổn định tốt quanh vị trí làm việc. Do đó, khi điểm làm việc không còn ở vị trí  $x_0$  thì bộ điều khiển không còn đảm bảo hệ thống hoạt động tốt. Tuy nhiên, qua các Hình 11 đến Hình 16, ta nhận thấy: hệ thống vẫn còn đảm bảo ổn định nếu giá trị đặt của góc  $\theta_1$  không quá  $\frac{\pi}{8} \approx 4(rad)$ .

**5. KẾT LUẬN**

Bài báo đã trình bày cách thức xây dựng thành công một bộ điều khiển tối ưu LQR cho hệ thống con lắc ngược bốn bậc. Kết quả mô phỏng cho thấy: hệ thống đáp ứng nhanh về vị trí cân bằng thẳng đứng và nếu giá trị đặt của cánh tay chấp hành (link 1) không quá xa so với vị trí thẳng đứng thì hệ thống vẫn giữ được ổn định.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] Olfar Boubaker, *The inverted pendulum: a fundamental Benchmark in Control Theory and Robotics*, pp 1-6, International Conference on Education and e-Learning Innovations (ICEELI), IEEE, 2012.
- [2] Simon Lam and Edward J. Davison, *The real Stabilizability Radius of the Multi-Link Inverted Pendulum*, Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA, 2006.
- [3] Igor Ananyeski, Nikolay Anokhin, *Control of a Multi-link Inverted Pendulum by a Single Torque*, Vol. 7, Issue. 1, 7<sup>th</sup> Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD), 2012.
- [4] I.M. Ananyeskii, N.V.Anokhin, *Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Elsevier, Vol. 78, No. 6, pp. 755-765, 2015
- [5] Dương Hoài Nghĩa, *Hệ thống điều khiển đa biến*, NXB ĐHQG TP HCM, 2007.
- [6] Spong, M.W and Block, D.J, *The Pendubot: a mechatronic system for control research and education*, Proceedings of the 34<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 555-556, 1995.
- [7] Alexander Bogdanov, *Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart*, Technical Report CSE-04-006, OGI School of Science & Engineering, OHSU, 2004.
- [8] Jianqiang Yi, Naoyoshi Yubazaki, Kaoru Hirota, *Stabilization control of series-type double inverted pendulum systems using the SIRMs dynamically connected fuzzy inference model*, Journal of Artificial Intelligent in Engineering, Vol. 15, pp. 297-308, 2001.
- [9] Sehgal, S, Tiwari, S, *LQR control for stabilizing triple link inverted pendulum*, 2th International Conference on Power, Control and Embedded Systems (ICPCES), IEEE, pp. 1-5, 2012.
- [10] Tobias Gluck, Andreas Eder, Andreas Kugi, *Swing-up Control of a Triple pendulum on a Cart with Experimental Validation*, Journal Automatica (Journal of IFAC), Vol. 49, Issue 3, pp 801-808, 2013.