

## Programming and Constructing Model of Four-Wheel Steering System

Nguyen Hac Lan Duong\*, Trung Kien Nguyen, Nguyen Nhat Khuong Huynh  
Ho Chi Minh City University of Technology and Education, Vietnam

\*Corresponding author. Email: [landnh@hcmute.edu.vn](mailto:landnh@hcmute.edu.vn)

### ARTICAL INFO

Received: 14/10/2024  
Revised: 26/11/2024  
Accepted: 11/12/2024  
Published: 28/08/2025

### KEYWORDS

RWS;  
Matlab/Matlab Simulink;  
Ratio of steering angles;  
Rear axle steering;  
Control algorithm.

### ABSTRACT

This article studies the method of programming and controlling rear axle steering depending on input signals consisting of the speed of the vehicle, and steering wheel angle to modelize the RWS system besides simplifying the design of suspension serving for RWS. This paper applies mathematic equations, arithmetic equivalence, and the theoretical basis of dynamic and kinematics of vehicle turning to create the algorithm and select suitable adaptors. The consequences of the research are based on mathematical formulas and simulation of Matlab/Matlab Simulink about the characteristic curve of the ratio of steering angles relying on linear speed. In conclusion, Although RWS is not a recent issue, its applicability and popularity level are low. Therefore, via this research article, the authors intend to contribute a design for the RWS system for the purpose of proving the ability of operation as well as the practical application of the model.

## Lập trình điều khiển và xây dựng mô hình xe đánh lái 4 bánh

Dương Nguyễn Hắc Lâm\*, Nguyễn Trung Kiên, Huỳnh Nguyễn Nhật Khương  
Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

\*Tác giả liên hệ. Email: [landnh@hcmute.edu.vn](mailto:landnh@hcmute.edu.vn)

### THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài: 14/10/2024  
Ngày hoàn thiện: 26/11/2024  
Ngày chấp nhận đăng: 11/12/2024  
Ngày đăng: 28/08/2025

### TỪ KHÓA

RWS;  
Matlab/Matlab Simulink;  
Tỉ lệ pha góc lái;  
Đánh lái cầu sau;  
Thuật toán điều khiển.

### TÓM TẮT

Bài báo trình bày nghiên cứu phương pháp về lập trình và điều khiển đánh lái cầu sau dựa trên các tín hiệu đầu vào như tốc độ xe, góc quay vô lăng nhằm mô hình hóa hệ thống RWS trên xe và đơn giản thiết kế khung gầm phục vụ cho RWS. Áp dụng các phương trình toán học, biến đổi số học, cơ sở lý thuyết về động học và động lực học quay vòng ô tô để thiết kế thuật toán điều khiển và chọn bộ chấp hành phù hợp. Kết quả nghiên cứu dựa vào các kết quả tính toán và sử dụng phần mềm Matlab/ Simulink đã mô phỏng đường đặc tính tỉ lệ pha của góc lái cầu sau theo tuyến tính tốc độ. Kết luận, RWS mặc dù không phải là vấn đề mới, tuy nhiên tính ứng dụng và mức độ phổ biến chưa cao. Do đó, thông qua bài nghiên cứu này, nhóm nghiên cứu muốn đóng góp một thiết kế cho hệ thống RWS nhằm chứng minh khả năng vận hành cũng như tính ứng dụng của xe vào thực tế.

Doi: <https://doi.org/10.54644/jte.2025.1678>

Copyright © JTE. This is an open access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium for non-commercial purpose, provided the original work is properly cited.

### 1. Giới thiệu

Hệ thống đánh lái cầu sau (Rear Wheel Steering) đã được phát triển hàng thập kỉ qua với mục đích tăng sự ổn định (Stability) cho xe và cảm giác lái (Handling Performance). Khi điều khiển xe trong khu vực đông dân cư, các khúc cua hẹp, linh hoạt tại các bãi xe nhờ sự hỗ trợ của RWS mà người lái có cảm giác lái tốt hơn, đồng thời tính cơ động của xe tăng do bán kính quay vòng của xe giảm. Khi lái xe trên đường cao tốc, ở tốc độ cao, tính ổn định ngang của xe được cải thiện vì RWS giảm độ lắc ngang gây

ra bởi cầu sau. Việc nghiên cứu hệ thống lái bốn bánh xe dẫn hướng trên xe ô tô con (xe du lịch) là một trong những vấn đề được các nhà thiết kế hết sức quan tâm. Hệ thống lái của ô tô có ảnh hưởng lớn tới chất lượng vận hành, tính an toàn chuyển động của ô tô. Honda Prelude từ những năm 1987; Honda Accord năm 1989; Nissan Skyline năm 1988; Toyota Soarer năm 1992; Nissan Laurel năm 1993 [1], đây là các dòng xe đã đưa vào sản xuất nhưng tính năng của nó cũng rất hạn chế, phức tạp cho người điều khiển, vào những năm gần đây có một số tác giả trong nước đã nghiên cứu về vấn đề về hệ thống lái. Ông Nguyễn Khắc Trai đã nghiên cứu về quỹ đạo chuyển động chuyển động của ô tô đóng góp rất lớn về nghiên cứu vấn đề tính ổn định lật xe bằng đồ thị pha và quỹ đạo pha [2]. Ông Lê Anh Tuấn đã nghiên cứu về hệ thống lái và đã giải quyết các vấn đề về góc quay vòng thiếu và thừa [3] dựa trên cơ sở của các nghiên cứu trước đó thì đề tài đặt ra các mục tiêu nghiên cứu chính của đề tài bao gồm các nhiệm vụ sau:

(1) Nghiên cứu xây dựng thuật toán điều khiển cho hệ thống đánh lái cầu sau.

(2) Nghiên cứu tính toán, lựa chọn bộ chấp hành phù hợp cho hệ thống lái sau dựa trên ảnh hưởng của ma sát lốp và mặt đường.

## 2. Phương pháp thực hiện.

### 2.1 Phân tích động học 4WS

**Bảng 1.** Các kí tự đặc biệt và tên gọi để phục vụ tính toán động học và động lực học cho xe.

Kí tự đặt biệt	Tên gọi	Kí tự đặt biệt	Tên gọi
$V_G$	Vận tốc trọng tâm	$F_{yf}$	Phản lực ngang tác dụng lên bánh xe cầu trước
$V_x$	Vận tốc trọng tâm phân tích theo phương x	$F_{yr}$	Phản lực ngang tác dụng lên bánh xe cầu sau
$V_y$	Vận tốc trọng tâm phân tích theo phương y	$k_{c1}$	Hệ số chống lệch bên cầu trước
$\omega$	Vận tốc góc thân xe	$k_{c2}$	Hệ số chống lệch bên cầu sau
$r$	Tốc độ lắc ngang của thân xe	$\alpha_f$	Góc lệch hướng bánh xe cầu trước
$V_f$	Vận tốc tại tâm cầu trước	$\alpha_r$	Góc lệch hướng bánh xe cầu sau
$V_r$	Vận tốc tại tâm cầu sau	$\delta_f$	Góc đánh lái vô lăng
$a_G$	Gia tốc tại trọng tâm xe	$\delta_r$	Góc đánh lái của bánh xe cầu sau
$a_{G(1)}$	Gia tốc tại trọng tâm xe phân tích theo phương vận tốc trọng tâm	$I_z$	Mô men quán tính chuyển động quay của thân xe
$a_{G(2)}$	Gia tốc tại trọng tâm xe phân tích theo phương hướng tâm	$a$	Khoảng cách từ tâm cầu trước đến trọng tâm xe
$a_x$	Gia tốc theo phương x	$b$	Khoảng cách từ tâm cầu sau đến trọng tâm xe
$a_y$	Gia tốc theo phương y	$s$	Tỉ lệ $\delta_r/\delta_f$
$\beta$	Góc lệch hướng	$m$	Khối lượng của xe

Dựa vào Hình 1, gọi hệ quy chiếu (x, y, z; G) như hình vẽ với các véc tơ đơn vị (i, j, k) đặt tại trọng tâm xe G, gọi  $\omega$  là vận tốc góc của thân xe, r là tốc độ lắc ngang thân xe theo phương z (yaw rate) [4]:

Vận tốc tại trọng tâm xe:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_x + \vec{V}_y = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \quad (1)$$

Vận tốc góc dao động tức thời thân xe:

$$\vec{\omega} = r\vec{k} \quad (2)$$

Áp dụng công thức cộng vận tốc cho điểm P(x<sub>p</sub>, 0, 0) trên thân xe (Hình 1)

$$\begin{aligned} \vec{V}_P &= \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge G\vec{P} = (V_x \vec{i} + V_y \vec{j}) + r\vec{k} \wedge (x_p \vec{i} + y_p \vec{j}) \\ &= (V_x \vec{i} + V_y \vec{j}) + rx_p \vec{j} - ry_p \vec{i} \\ &= (V_x - ry_p) \vec{i} + (V_y + rx_p) \vec{j} \end{aligned} \quad (3)$$

Áp dụng tính cho vận tốc tại tâm cầu trước và cầu sau lần lượt là  $\vec{V}_f$  (a, 0, 0) và  $\vec{V}_r$  (-b, 0, 0):

$$\vec{V}_f = V_x \vec{i} + (V_y + ra) \vec{j} \quad (4)$$

$$\vec{V}_r = V_x \vec{i} + (V_y - rb) \vec{j} \quad (5)$$

Gia tốc trọng tâm G,  $\vec{a}_G$  được phân tích thành 2 thành phần  $\vec{a}_{G(1)}$  là thành phần hướng theo phương vận tốc  $\vec{V}_G$  và  $\vec{a}_{G(2)}$  là thành phần gia tốc hướng tâm:

$$\begin{aligned} \vec{a}_G &= \vec{a}_{G(1)} + \vec{a}_{G(2)} \\ &= \dot{\vec{V}}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_G = (\dot{V}_x - V_y r) \vec{i} + (\dot{V}_y + V_x r) \vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \end{aligned} \quad (6)$$

Từ  $a_y = \dot{V}_y + V_x r$  và  $\tan\beta = \frac{V_y}{V_x}$ , phương trình gia tốc ngang của xe:

$$a_y = \dot{V}_y + V_x r = (r + \tan\beta) V_x \quad (7)$$

Xét trường hợp góc lệch hướng  $\beta$  nhỏ ( $\beta < 1^\circ$ ), phương trình trở thành:

$$a_y = (r + \beta) V_x \quad (8)$$

Gia tốc ngang  $a_y$  của xe sẽ phục vụ cho tính toán động lực học từ đó dựng được đồ thị góc đánh lái cầu sau  $\delta_r$  theo  $\delta_f$  và vận tốc xe  $V_x$ .

## 2.2. Động lực học ngang 4WS

Sử dụng mô hình một vết bánh xe (Single Track Model) hay còn được gọi là mô hình xe đạp (Hình 1) là phương pháp đơn giản nhất để phân tích động lực học ngang của xe.

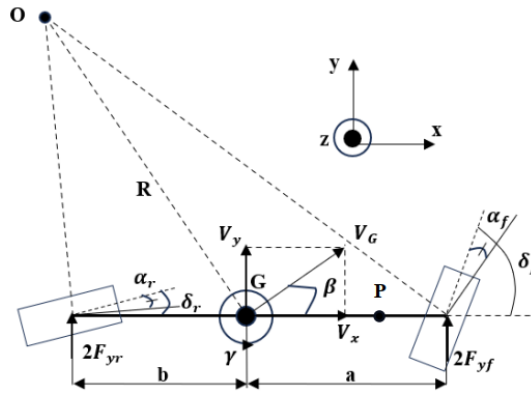
Khả năng chống lệch bên ký hiệu là  $k_c$ , Gọi  $k_{c1}$  và  $k_{c2}$  lần lượt khả năng chống lệch bên của bánh xe cầu trước và cầu sau [5]. Phản lực ngang biểu diễn như sau:

$$F_{yf} = k_{c1} \alpha_f \quad (9)$$

$$F_{yr} = k_{c2} \alpha_r \quad (10)$$

Với  $\alpha_f$  và  $\alpha_r$  lần lượt là góc lệch bên của bánh xe của cầu trước và sau.

Dựa vào sơ đồ Hình 1 và phép gần đúng, ta thiết lập được phương trình phản lực ngang tác dụng lên cầu trước và cầu sau:



Hình 1. Mô hình một vết bánh xe (Single-track vehicle) cho 4WS.

$$F_{yf} = k_{c1} \alpha_f = k_{c1} \left( \delta_f - \beta - \frac{a\omega}{V_x} \right) \quad (11)$$

$$F_{yr} = k_{c2} \alpha_r = k_{c2} \left( \delta_r - \beta + \frac{b\omega}{V_x} \right) \quad (12)$$

Phương trình cân bằng lực và cân bằng mô men từ Hình 1:

$$\sum F_y = F_{yf} + F_{yr} = m \cdot a_y = m V_x (\dot{\beta} + r) \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow k_{c1} \delta_f + k_{c2} \delta_r = m V_x (\dot{\beta} + r) + (k_{c1} + k_{c2}) \beta + \frac{b k_{c2} - a k_{c1}}{V_x} r$$

$$\sum M_Z = F_{yf} a - F_{yr} b = I_Z \dot{r} \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow a k_{c1} \delta_f - b k_{c2} \delta_r = I_Z \dot{r} + (a k_{c1} - b k_{c2}) \beta + \frac{(a^2 k_{c1} + b^2 k_{c2}) r}{V_x}$$

$$\Leftrightarrow k_{c1} a \left( \delta_f - \beta - \frac{ar}{V_x} \right) - k_{c2} b \left( \delta_r - \beta + \frac{br}{V_x} \right) = I_Z \dot{r}$$

Trong trạng thái chuyển động quay vòng ổn định, góc  $\beta$  là một hằng số và  $r$  (yaw rate) cũng là hằng số vì lúc này xe quay vòng ổn định nên ứng với hệ quy chiếu gắn với trọng tâm xe, xe đang tự quay quanh trục  $z$  với tốc độ ổn định.

Do đó  $\dot{\beta} = 0$  và  $\dot{r} = 0$ ;  $V_x \gg V_y$  nên ta suy ra:  $\beta \ll 1$ .

Giải hệ phương trình (13) và (14), và đặt  $A = \frac{m V_x^2 + b k_{c2} - a k_{c1}}{a^2 k_{c1} + b^2 k_{c2}}$  (15)

$$\delta_r(V_x, \delta_f) = \frac{k_{c1} (Aa - 1)}{k_{c2} (Ab + 1)} \delta_f \quad (16)$$

### 2.3. Thiết kế thuật toán điều khiển 4WS

Mục tiêu nghiên cứu của nhóm là thiết kế hệ thống điều khiển theo ý tưởng của phần lớn hệ thống đánh lái cầu sau hiện nay. Từ những năm 1980, chiếc Mazda 626 đã phát triển ý tưởng này, sử dụng tham số chính đó là tốc độ xe để điều chỉnh tỉ lệ góc lái ứng với một góc vô lăng xác định.

Từ phương trình (15), rút ra tỉ số của góc lái trước và sau gọi là tỉ lệ góc lái (Ratio of Steering Angles):

$$s = \frac{\delta_r}{\delta_f} = \frac{k_{c1}(Aa - 1)}{k_{c2}(Ab + 1)} \quad (17)$$

Ta sẽ khảo sát sự biến thiên của r theo tốc độ xe, sử dụng công thức (17) đã tính toán được. Sau đó, tối ưu hóa đồ thị để thu được dạng đồ thị như hình trên. Theo đồ thị Hình 2, tỉ lệ góc lái có 3 pha: ngược pha ( $r < 0$ , hai bánh đánh lái ngược chiều), pha trung tính ( $s = 0$ , góc lái sau bằng không) và cùng pha ( $s > 0$ , hai bánh đánh lái cùng chiều).

Sử dụng phần mềm Matlab/ Simulink để khảo sát đồ thị tỉ lệ góc lái theo tốc độ ứng với góc vô lăng xác định. Bởi vì  $\delta_r$  và  $\delta_f$  tỉ lệ với nhau theo phương trình (17) nên khi  $\delta_f$  tăng thì  $\delta_r$  tăng tuyến tính mà không làm ảnh hưởng đến hệ số s ( $V_x$ ).

Trước tiên, ta có bảng các tham số tham gia vào khảo sát đồ thị s ( $V_x$ ) bao gồm:  $k_{c1}$ ,  $k_{c2}$ , a, b,  $V_x$ , m.

**Bảng 2.** Các thông số tham gia vào xây dựng đồ thị (thông số của xe mô hình).

Thông số (kí hiệu)	Giá trị (đơn vị)
Tổng khối lượng xe (m)	94(kg)
Khả năng chống lệch bên cầu trước ( $k_{c1}$ )	2.2 (N/độ)
Khả năng chống lệch bên cầu sau ( $k_{c2}$ )	16 (N/độ)
Hệ số tối ưu đồ thị (i)	2
Hệ số tối ưu đồ thị (j)	0.3
Khoảng cách cầu trước đến trọng tâm xe (a)	1150 (mm)
Khoảng cách cầu sau đến trọng tâm xe (b)	500(mm)
Vận tốc xe ( $V_x$ )	0-40 (km/h)
Góc đánh lái cầu trước cực đại ( $\delta_{fmax}$ )	35 (độ)

Đưa các số liệu bảng trên vào Matlab Simulink theo sơ đồ Hình 3:

Dựa vào công thức đã rút ra từ các phương trình động học vào động lực học phần 2.1 và 2.2, đưa chúng vào Matlab và viết chúng lại dưới dạng biểu thức như sau

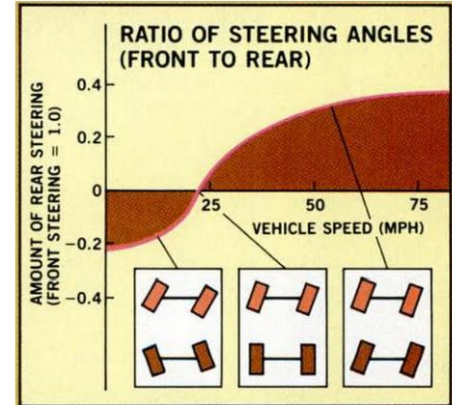
Biểu thức (15) đưa vào khối Fcn A được viết lại dưới dạng ngôn ngữ lập trình như sau:

$$A = (u(3)*u(6)^2+u(2)*u(5)-u(1)*u(4))/(u(1)^2*u(4)+u(2)^2*u(5))$$

Biểu thức (17) đưa vào khối Fcn s được viết lại dưới dạng ngôn ngữ lập trình như sau:

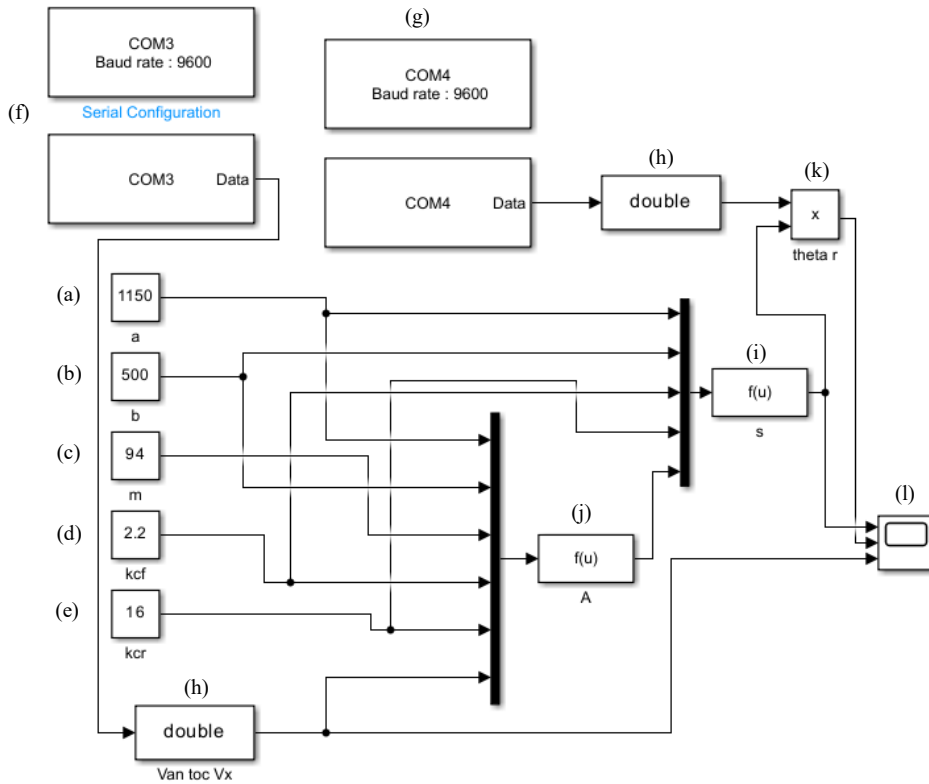
$$s = i*(u(3)*(u(5)*u(1)-1))/(u(4)*(u(5)*u(2)+1))- j$$

Để làm rõ vai trò của Matlab Simulink (Hình 3), thực hiện mô phỏng hệ thống điều khiển trên phần mềm Protues 8 (Hình 4), thực hiện mô phỏng giao tiếp giữa 2 vi điều khiển Arduino Uno và Arduino Mega2560 thông qua chuẩn giao tiếp UART, trong đó Arduino Uno sẽ phụ trách đo tốc độ xe gửi về từ cảm biến hồng ngoại thông qua chân 2 (Hình 4), tín hiệu sau đó sẽ được Arduino Uno xử lí và truyền ra chân TX vào Compim P1 (Hình 4) để vào Matlab Simulink (khối f, hình 3), kết hợp với các phương

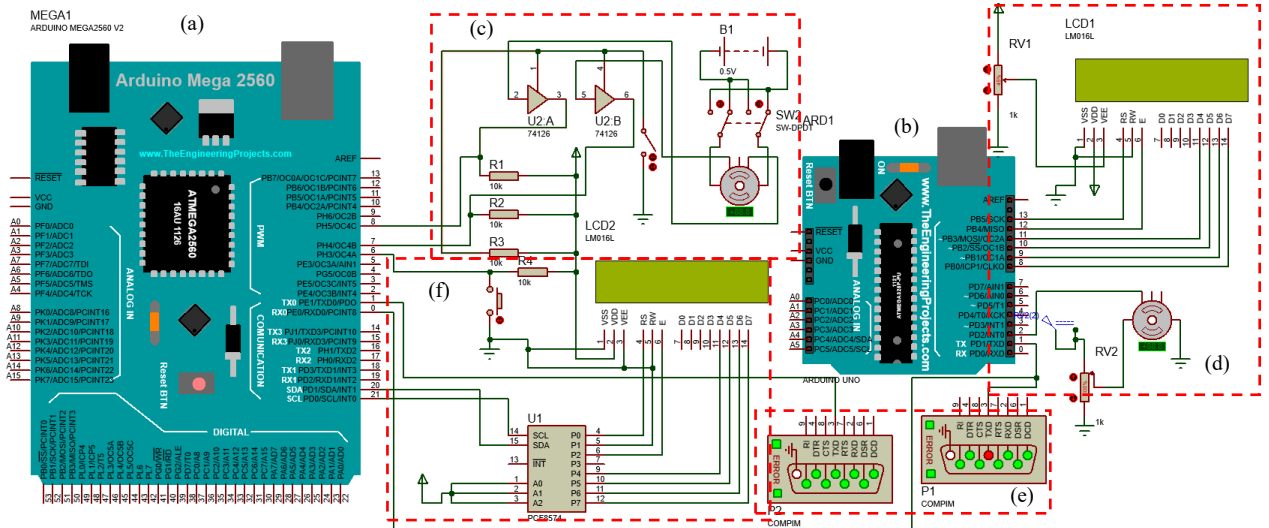


**Hình 2.** Đồ thị tỉ lệ góc lái cầu sau và cầu trước của xe Mazda 626 (1988) [6].

trình và thông số có sẵn trong Simulink (Hình 3), mong muốn sẽ thu được kết quả mô phỏng với hình dạng đồ thị tương tự với Hình 2 [6].

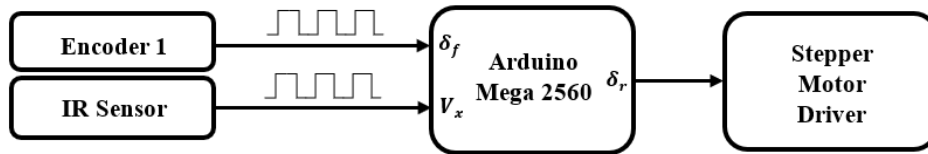


**Hình 3.** Các thông số được đưa vào khảo sát đồ thị tỉ lệ góc lái. (a), (b), (c), (d), (e) Các khối hằng số trong Simulink theo Bảng 2. (f), (g) Khối Serial Received để nhận dữ liệu truyền đến từ Proteus 8. (h) Chuyển đổi kiểu dữ liệu thành double. (i), (j) Khối Fcn trong Simulink, ta đưa lần lượt biểu thức (15) và (17) vào. (k) Khối product trong Simulink. (l) Khối Scope - đồ thị đầu ra.



**Hình 4.** Sơ đồ tổng quát mô phỏng hệ thống điều khiển đánh lái cầu sau. (a), (b) Arduino Mega 2560 và Arduino Uno. (c) Cụm mô phỏng Rotary Encoder để nhận góc vô lăng. (d) Cụm mô phỏng cảm biến tốc độ xe và hiển thị tốc độ lên màn hình LCD. (e) Khối Compim nhận tín hiệu Tx từ Arduino gửi qua Simulink mô phỏng. (f) Khối hiển thị góc lái dẫn hướng, góc lái cầu sau LCD I2C.

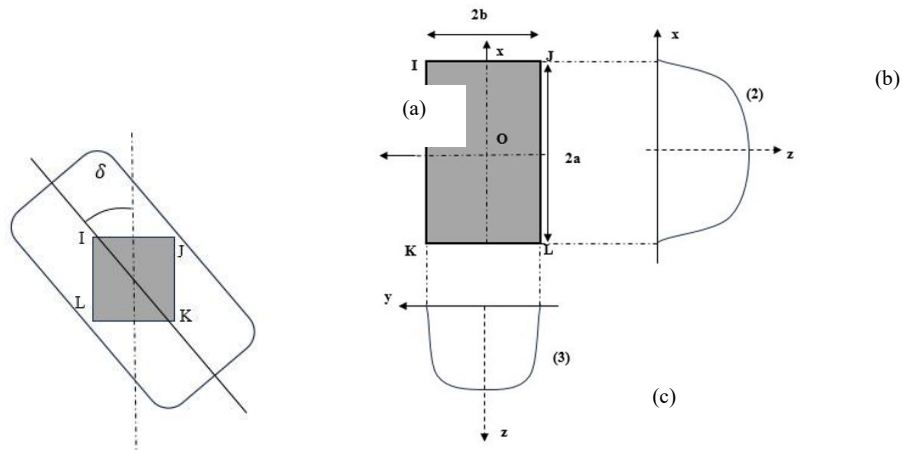
Vi điều khiển Arduino Mega 2560 nhận tín hiệu đầu vào  $V_x$  từ Arduino Uno truyền từ P01/TXD (b) tới PE0/RX0 (a) và tín hiệu góc vô lăng từ cụm mô phỏng Rotary Encoder trước khi tính toán góc lái cầu sau  $\delta_r$  theo phương trình (16), cuối cùng truyền tín hiệu đến Stepper Motor Driver để điều khiển góc lái phù hợp. Đồng thời, từ góc vô lăng qua Arduino Mega 2560 sẽ tính toán ra góc lái dẫn hướng cầu trước và truyền tín hiệu ra chân PE1/RX1 tới Compim P2 (e). Dữ liệu sau đó sẽ theo phương thức Serial Communication của Simulink qua COM4 (khối g, Hình 3) thực hiện tính toán và cuối cùng hiển thị tại Scope (khối k, Hình 3). Đề thể hiện đầy đủ sự phụ thuộc của góc lái cầu sau theo tốc độ xe  $V_x$  và góc vô lăng (hoặc góc lái dẫn hướng cầu trước). Ta sẽ thực hiện tuyến tính hóa  $V_x \left[ \frac{40}{t} \right]$  và  $\delta_f \left[ \frac{35}{t} \right]$  và thu được kết quả biến thiên của  $s$  và  $\delta_r$  (Hình 8).



Hình 5. Thiết kế hệ thống điều khiển.

Motor bước được định góc quay bởi vi điều khiển Arduino Mega 2560 truyền tín hiệu đến DMA860H Motor Driver (Hình 5), driver này phụ trách điều khiển động cơ bước Nema34.

#### 2.4. Tính toán, chọn bộ chấp hành đánh lái sau



Hình 6. Sử dụng mô hình Friction Limit để tính toán mô-men cản lái giới hạn của từng bánh xe (a) Bề mặt tiếp xúc của bánh xe với mặt đường. (b) Đồ thị tải trọng pháp tuyến theo phương x của bánh xe. (c) Đồ thị tải trọng pháp tuyến theo phương y của bánh xe.

Kích thước phần diện tích tiếp xúc IJKL theo công thức kinh nghiệm [7]:

$$a = \frac{D}{100} \left( \frac{c.k.Z_2^{0.85}}{B^{0.7}D^{1.43}P^{0.6}} \right)^s \quad (18)$$

$$b = \frac{B}{200} \left( 1 - e^{-t.c.k \frac{Z_2^{0.85}}{B^{0.7}D^{0.43}P^{0.6}}} \right) \quad (19)$$

Bảng 3. Các thông số tính toán mô-men cản lái phục vụ cho chọn động cơ bước lái sau.

Thông số (kí hiệu)	Giá trị (đơn vị)
Đường kính bánh xe (D)	20.5 (cm)

Chiều cao (độ dày) bánh xe (B)	15 (cm)
Hệ số điều chỉnh biến dạng (k)	0.645
Hệ số phụ thuộc vào loại lốp (c)	1.15
Áp suất lốp (P)	2 (bar)
Hệ số chiều dài diện tích tiếp xúc (s)	0.557
Hệ số chiều rộng diện tích tiếp xúc (t)	122.7
Tải trọng xe tác dụng lên cầu sau (Z <sub>2</sub> )	65.51(10N)
Hệ số ma sát ( $\mu$ )	0.9
Tốc độ quay cực đại motor bước (rad/s)	3.14

Áp lực pháp tuyến tại điểm cách O một khoảng x tuân theo công thức thứ 4 của Cao et al [7]:

$$p(x) = \frac{5F_z}{8a} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^4 \right] \quad (20)$$

Xét một phần tử vi phân dx, dy. Phương trình vi phân tải trọng tác dụng lên phần diện tích nhỏ:

$$dF_z = \frac{p(x)}{2b} dx dy \quad (21)$$

Khi đó, lực cản đánh lái vi phân do ma sát sinh ra ở bề mặt được tính như sau:  $dF_f = \mu \cdot dF_z$  (22)

Mô men cản lái do phần tử diện tích dx, dy gây ra là:  $dM_f = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dF_f$  (23)

Mô men cản lái tổng hợp của từng bánh xe là tích phân hai lớp của  $dM_f$  với  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$

$$M_f = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \mu \cdot \frac{p(x)}{2b} dx dy \quad (24)$$

Theo định luật II Niu-ton, ta thiết lập được mối quan hệ giữa mô men tại trục vít ( $M_p$ ), khối lượng thanh răng chuyển động và mô men cản tổng hợp ( $M_f$ ) như sau [8]:  $M_p - 2M_f = m_r \ddot{\delta}_r D^2 + I_A \ddot{\delta}_r$  (25)

**Bảng 4.** Các thông số tính toán chọn động cơ lái sau.

Kí hiệu	Mô tả	Giá trị	Kí hiệu	Mô tả	Giá trị
$\alpha$	Góc quay bánh vít (°)	(-270,270)	$l_1$	Độ dài đòn quay moay $\sigma$ (m)	0.11
$\delta_r$	Góc quay moay $\sigma$ cầu sau (°)	(-5,5)	$l_2$	Độ dài rô tuyền lái (m)	0.07
$\eta_m$	Hiệu suất động cơ	0.9	$l_3$	Độ dài nửa thân moay $\sigma$ (m)	0.05
$\eta_g$	Hiệu suất hộp giảm tốc	0.93	$P_p$	Công suất tại bánh vít (W)	
$R_p$	Bán kính bánh vít (m)	0.14	$m_r$	Khối lượng thanh răng (kg)	0.4
$P_m$	Công suất của motor (W)		$I_A$	Mô men quán tính tổng hợp của moay $\sigma$ và bánh xe (kg.m <sup>2</sup> )	0.114
$\varphi$	Góc giữa cánh tay đòn moay $\sigma$ và thước lái (°)	54	$\ddot{\delta}_r$	Gia tốc quay của moay $\sigma$ (rad/s <sup>2</sup> )	0.1
D	Cánh tay đòn cho chuyển động quay bánh xe (m)	$l_1 \sin \varphi + l_3$	$\dot{\delta}_r$	Vận tốc quay của moay $\sigma$ (rad/s)	0.316

### 3. Kết quả và bàn luận

#### 3.1. Kết quả chọn động cơ lái sau:

**Bảng 5.** Bảng phân loại động cơ bước Nema34 [9].

Model	Step Angle (°)	Motor Length (mm)	Rated Current (A)	Holding Torque (N.m)	Phase Resistance (Ω)	Phase Inductance (mH)	Rotor Inertia (g.cm <sup>2</sup> )	Lead Wires (NO.)	Motor Weight (kg)
<b>FY86ES 350A</b>	1.8	80	3.5	4.50	1.0	4.4	1500	4	2.00
<b>FY86EM 400A</b>		94	4.0	6.00	0.8	3.5	2700	4	2.80
<b>FY86EL 400A</b>		118	4.0	8.50	0.97	5.5	4100	4	3.80
<b>FY86EC 500A</b>		150	5.0	12.0	1.20	6.0	6200	4	5.20

Đối với motor động lực lái cầu sau, ta sẽ tính toán để chọn ra động cơ có mô men xoắn phù hợp:

Thay số liệu Bảng 3 vào phương trình (18) và (19), kích thước bề mặt tiếp xúc:

$$a = 0.03121(\text{m})$$

$$b = 0.075(\text{m})$$

Trục lái thiết kế quay 2,75 vòng thì encoder quay 5,5 vòng và nó sẽ điều khiển cho motor bước quay 1,5 vòng nhờ vào tùy chọn độ vi bước 200 trên stepper motor driver. Theo đó:

Tốc độ cực đại của motor bước, với  $\delta_v = 4.75\pi$  là góc lái cực đại của vô lăng và  $t_v = 3(\text{s})$  là thời gian đánh lái tối thiểu:

$$\dot{\alpha} = \frac{1.5}{2.75} \cdot \frac{\delta_v}{t_v} = 3,14(\text{rad/s}) \quad (26)$$

Mô men cản lái tổng hợp  $M_f$  từ phương trình (24), thực hiện biến đổi:

$$\begin{aligned} M_f &= \frac{5\mu Z_2}{8a^5} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \sqrt{x^2+y^2} (a^4-x^4) dx dy \\ &= \frac{5\mu Z_2}{8a^5} \int_{-b}^b \frac{(24a^4y^2-3y^6)\text{arsinh}\left(\frac{a}{y}\right) + \sqrt{y^2+a^2}(3ay^4-2a^3y^2+16a^5)}{24} dy \\ &= \frac{5\mu Z_2}{8a^5} \left( \frac{135a^7 \ln\left(\frac{b}{|a|} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}\right) + \sqrt{b^2+a^2}(8ab^5-6a^3b^3+121a^5b)}{192} \right) \\ &= 4.582(\text{N.m}) \end{aligned} \quad (27)$$

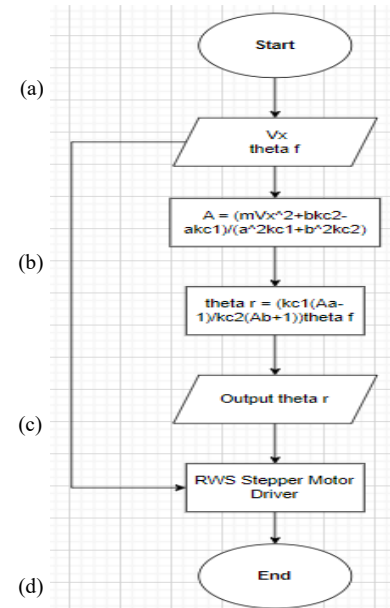
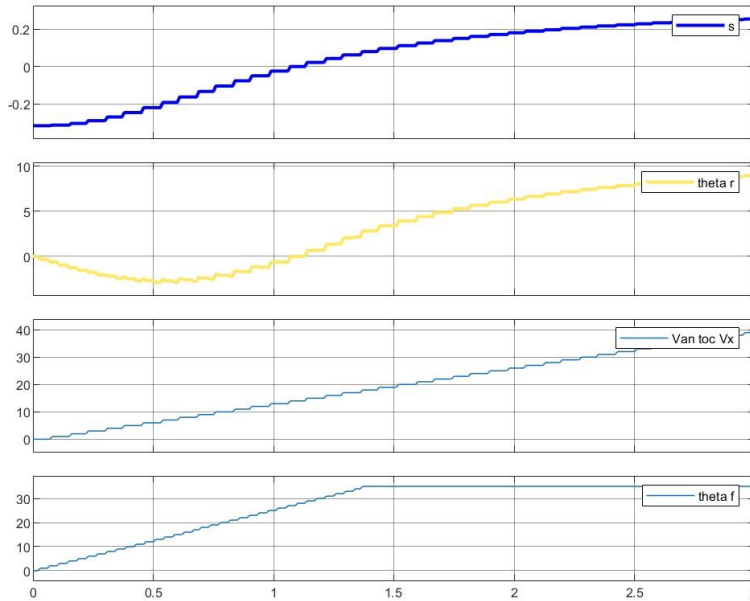
Từ kết quả tính được của phương trình (26), (27), kết hợp với số liệu Bảng 4 thay vào phương trình (25), thu được kết quả:

$$M_m = \frac{P_p}{\eta_m \eta_g} = \frac{\left\{ \ddot{\delta}_r \left[ m_r (l_1 \sin \varphi + l_3)^2 + I_A \right] + 2M_f \right\} (l_1 \sin \varphi + l_3) \dot{\delta}_r}{R_p \eta_m \eta_g \dot{\alpha}} = 10.9535(\text{N.m}) \quad (28)$$

Dựa vào Bảng 5, theo tiêu chuẩn ATO [9], chọn loại động cơ FY86EC500A.

### 3.2. Kết quả thiết kế thuật toán điều khiển:

Thuật toán điều khiển được xây dựng trên cơ sở động học, động lực học của xe và dựa trên lý thuyết điều khiển góc lái cầu sau theo tốc độ và tín hiệu góc lái vô lăng. Sau khi đưa số liệu từ Bảng 2, thiết lập các công thức như đã chứng minh ở phần 2.1 và 2.2 vào phần mềm Matlab Simulink và tiến hành mô phỏng. Kết quả thu được như Hình 8, đánh giá về hình dạng đồ thị Hình 8, tỉ lệ góc lái  $s$  biến thiên theo tuyến tính của tốc độ xe trên 3 pha – pha âm ( $s < 0$ ), pha trung tính ( $s = 0$ ) và pha dương ( $s > 0$ ). Với  $s(V_{x0}) = 0$  tại  $V_{x0} = 12 \div 15$  (km/h). Điều này đã thỏa yêu cầu đặt ra cho thuật toán điều khiển góc lái sau theo tốc độ và góc vô lăng cầu trước.



**Hình 8.** Các kết quả thu được của mô phỏng hoạt động RWS.

(a) Kết quả đồ thị tỉ lệ pha  $s$ . (b) Kết quả đồ thị góc lái cầu sau  $\delta_r$  theo  $V_x$  và  $\delta_f$ . (c) Đồ thị tuyến tính  $V_x$  theo thời gian  $t$ . (d) Đồ thị tuyến tính  $\delta_f$  theo thời gian  $t$ . (e) Lưu đồ giải thuật RWS.

Theo đồ thị đặc tuyến  $s$  thu được, ta thấy ứng với phương trình mà ta xây dựng đã đạt yêu cầu tỉ lệ góc lái thay đổi từ giá trị âm về 0 và lên dương khi vận tốc xe thay đổi từ 0-40 (km/h). Dựa vào Hình 8, khi bắt đầu quá trình, vận tốc  $V_x$  và  $\delta_f$  nhận giá trị nhỏ, có thể thấy khi ta tăng góc lái cùng chiều kim đồng hồ, góc lái cầu trước đánh lái qua phải thì góc lái cầu sau nhận giá trị âm dần tới tỉ số  $s$  cũng âm, điều này phù hợp với nguyên lý đánh lái ngược chiều khi tốc độ xe thấp. Khi đồ thị góc lái cầu trước (d) tăng và đạt giá trị cực đại tại 35 độ nhưng vận tốc xe  $V_x$  (c) vẫn tiếp tục tăng tuyến tính thì góc lái cầu sau  $\delta_r$  vẫn tiếp tục tăng, điều này chứng minh  $\delta_r$  phụ thuộc độc lập vào vận tốc xe  $V_x$  và  $\delta_f$ , kết quả này phù hợp với thực tế.

### 4. Kết luận

Trong bài nghiên cứu này, nhóm nghiên cứu đã thực hiện tính toán động học và động lực học xe dựa trên cơ sở đó thiết kế thuật toán điều khiển cho hệ thống lái cầu sau, kết quả thu được có thể áp dụng trên xe mô hình nhưng vì dải tốc độ của xe chưa cao nên muốn áp dụng cho xe ở dải tốc độ xe cao hơn cần tinh chỉnh lại. Đồng thời, nhóm nghiên cứu đã mô hình hóa hệ thống ra thực tế dựa trên tính toán động lực học và chọn động cơ cho hệ thống lái sau dựa trên cơ sở lý thuyết về Friction Limit [7] của hệ thống lái. Bài nghiên cứu này có thể phục vụ cho mục đích học thuật, giảng dạy cũng như có thể ứng dụng vào thực tế như một phương pháp điều khiển đánh lái sau. Nhìn chung đề tài nghiên cứu đã nghiên cứu và thiết kế một chiếc xe RWS hoàn chỉnh với các chức năng cơ bản, phần lớn các nghiên cứu về RWS trong và ngoài nước hiện nay chỉ dừng lại ở mức độ mô phỏng, ngoài mô phỏng nhóm nghiên cứu đã thực hiện tích hợp phần cứng và phần mềm trên mô hình lớn nhằm đánh giá khả năng hoạt động của hệ thống điều khiển và bộ chấp hành, với mức độ đáp ứng của hệ thống điều khiển, dựa trên cơ sở này có thể phát triển các công trình nghiên cứu về tối ưu hóa chuyển động xe.

## Lời cảm ơn

Lời cảm ơn chân thành dành cho nhà trường Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp. HCM với các chính sách khuyến khích nghiên cứu khoa học và tạo điều kiện thuận lợi để tác giả tiến hành nghiên cứu và học tập. Nhờ những chính sách này, chúng tôi đã có cơ hội tiếp cận và sử dụng tài nguyên cần thiết để thực hiện nghiên cứu với mã đề tài **Sv2024-133**. Đồng thời, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Khoa đã tạo môi trường thuận lợi, cung cấp các điều kiện và nguồn lực hỗ trợ để tác giả có thể thực hiện hoạt động nghiên cứu một cách hiệu quả. Chân thành cảm ơn các bạn sinh viên đã đồng hành và hỗ trợ chúng tôi trong quá trình nghiên cứu.

## Xung đột lợi ích

Các tác giả tuyên bố không có xung đột lợi ích.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] C. Csere, "Tested: The four-wheel-steering systems of 1988," *Car and Driver*, 2021.
- [2] N. K. Trai, *Control Strategy and Movement Trajectory of Car*. Hanoi, Vietnam: Transport Publishing House, 1997.
- [3] L. A. Tuan, "Research on sideslip phenomena of rear axle wheels when steering," B.S. thesis, Univ. of Technology, Hanoi, Vietnam, 2021.
- [4] H. Z. K. S. W. L. Bin Deng, "Hierarchical synchronization control strategy," *J. Control Eng.*, no. 18, pp. 3–5, 2020.
- [5] G. M. D. Quy, *Theory of Vehicle*. Ho Chi Minh City, Vietnam, 2010.
- [6] J. Loyola, "Rear wheel steering: Applications beyond the conventional," B.S. thesis, Univ. of California, USA, pp. 11, 2022.
- [7] J. Prakash, "Exponential decay of contact-patch friction steering moment with rolling speed," *J. Veh. Dyn.*, pp. 3–5, 2021.
- [8] V. L. E. Bremer, "Mechanisms for rear wheel steering on a Formula Student car," M.S. thesis, KTH Royal Inst. of Technology, Stockholm, Sweden, pp. 1–49, 2018.
- [9] Automation Technologies Online, "Nema 34 stepper motor," Mar. 24. [Online]. Available: <https://www.ato.com/Content/doc/nema-34-stepper-motor-specs.pdf>

**Nguyen Hac Lan Duong** is a lecturer of HCM City University of Technology And Education, Vietnam. He graduated with MSc in Vehicle Engineering in 2019, from HCM City University of Technology and Education, Viet Nam. He has researched optimal suspension systems design and modeling the active suspension system and powertrain systems in vehicle. He has researched the Programming and Constructing of the Four-Wheel Steering System.

Email: [landnh@hcmute.edu.vn](mailto:landnh@hcmute.edu.vn). ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3428-6134>. SĐT: 0937475456.

**Trung Kien Nguyen** is a student of HCM City University of Technology And Education, Vietnam. He graduated Vehicle Engineering in 2024, from HCM City University of Technology and Education, Viet Nam. He has researched the Programming and Constructing of the Four-Wheel Steering System.

Email: [20145144@student.hcmute.edu.vn](mailto:20145144@student.hcmute.edu.vn). ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3562-1750>.

**Nguyen Nhat Khuong Huynh** is a student of HCM City University of Technology And Education, Vietnam. He graduated Vehicle Engineering in 2024, from HCM City University of Technology and Education, Viet Nam. He has researched the Programming and Constructing of the Four-Wheel Steering System.

Email: [20145074@student.hcmute.edu.vn](mailto:20145074@student.hcmute.edu.vn). ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4710-507X>