

HÀM NỘI SUY HIERARCHICAL TRONG PHÂN TÍCH TẤM 2D HIERARCHICAL INTERPOLATION FUNCTION IN 2D PLATE ANALYSIS

Hứa Thành Luân¹, Nguyễn Hoài Sơn¹, Chương Thiết Tú²

¹Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM, Việt Nam

²Trường Cao đẳng Công Thương, Việt Nam

Ngày toà soạn nhận bài 18/4/2017, ngày phản biện đánh giá 21/4/2017, ngày chấp nhận đăng 30/6/2017.

TÓM TẮT

Phương pháp HFEM là một hàm dạng nội suy của phương pháp phần tử hữu hạn, giúp ta thiết lập hệ thống lưới phân tử một cách trật tự và có thể tùy biến trên các bề mặt vật thể phức tạp nhằm cho ra kết quả chính xác. Phương pháp phần tử hữu hạn FEM là phương pháp số gần đúng để giải các bài toán được mô tả bởi các phương trình vi phân đạo hàm riêng trên miền phần tử xác định có hình dạng và điều kiện biên bất kỳ, mà nghiệm chính xác không thể tính được bằng phương pháp giải tích. Phương pháp phần tử hữu hạn hierarchical là một trường hợp đặc biệt của phương pháp Rayleigh-Ritz [1-2], sự khác biệt lớn nhất của FEM và HFEM là hàm nội suy. Mặc dù HFEM có nhiều điểm chung với các phương pháp Rayleigh-Ritz cổ điển nhưng việc sử dụng các hàm chuyển vị HFEM ở tính linh hoạt cao hơn và cải thiện tỷ lệ hội tụ cũng như tính chính xác cao hơn. Việc nghiên cứu về các lĩnh vực này không chỉ để giải quyết những yêu cầu kỹ thuật hiện đại mà còn chứng minh cho việc sử dụng các lý thuyết nâng cao [3] để khắc phục những giới hạn của lý thuyết cơ bản về cơ học vật liệu [4-5].

Từ khóa: phương pháp phần tử hữu hạn; HFEM; FEM; phương pháp Rayleigh-Ritz; hàm nội suy.

ABSTRACT

The HFEM method, as an interpolation of the finite element method (FEM), allows us to set up a molecular grid system in an orderly and customizable way on complex object surfaces to produce accurate results. Finite element method is an approximate numerical method for solving problems described by partial differential equations on the bounded domain of any shape and boundary condition with which the precise solution of the equation system cannot be obtained algebraically. Hierarchical Finite element method (HFEM) is a special case of the Rayleigh-Ritz method [1-2] and the biggest difference between FEM and HFEM is the interpolation function. Although HFEM has much in common with the classical Rayleigh-Ritz methods, the results of approximation functions in HFEM method is greater flexibility and improved convergence rates as well as greater accuracy. Research in these areas not only solves modern problems technical requirements, but also demonstrates the use of advanced theories to overcome the limitations of the fundamental mechanics of materials.

Keywords: Finite element method; HFEM; FEM; Rayleigh-Ritz method; the interpolation function.

1. GIỚI THIỆU

Trong HFEM tính chính xác của các giải pháp được cải thiện bằng cách tăng mức độ đa thức mà không làm ảnh hưởng đến

kích thước mắt lưới và số nút. Thứ hai, khi thứ tự của Hierarchical Mode được tăng kích thước của ma trận độ cứng phần tử và

khối lượng cũng được gia tăng và các ma trận phân tử và khối lượng ban đầu được cài sẵn trong những cái mới. Vì chúng được thay với các giá trị riêng để tính, luôn tiếp cận các giá trị thực và luôn có những ràng buộc trên các giá trị thực đó. Thứ ba giá trị riêng bằng các HFEM luôn cho xấp xỉ tốt hơn so với FEM thông thường và cuối cùng nhưng không kém quan trọng đó là trong HFEM có mô hình cấu trúc đơn giản.

2. HÀM DẠNG HIERARCHICAL

Hàm dạng hierarchical là một dạng đặc biệt của phương pháp Rayleigh-Ritz cổ điển. Sự khác biệt duy nhất là việc lựa chọn các phương pháp nội suy. Thông thường phương pháp phân tử hữu hạn quan tâm các khu vực sau đó chia thành khu vực phụ nhỏ hơn, không nhất thiết phải giống hệt nhau, được gọi là phân tử hữu hạn. Các giải pháp nội suy xấp xỉ này được các hàm đa thức thực hiện trong các miền và liên tục trên mỗi miền phụ.

Các hàm dạng hierarchical được thiết lập dựa trên các hàm dạng bậc đa thức. Trong bài này, chúng ta đã lựa chọn các bậc p của hàm đa thức. Các bậc đa thức này sẽ được lựa chọn theo thứ tự, trong đó có tính chất các hàm tương ứng với một hàm xấp xỉ của bậc thấp tạo thành một tập hợp các hàm tương ứng với một hàm xấp xỉ bậc cao. Tập hợp các bậc đa thức được sử dụng trong bài báo hiện tại được bắt nguồn từ hàm đa thức Legendre của Rodrigues:

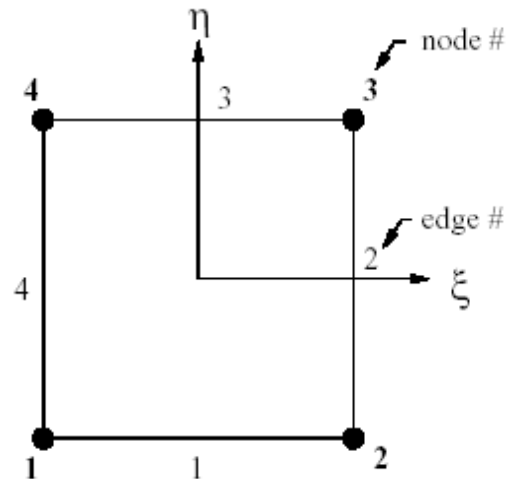
$$P_k(\xi) = \frac{d^k}{2^k k! d\xi^k (\xi^2 - 1)^k} \quad (1)$$

$k=0,1,2,\dots$

Chuyển vị u xác định bởi định dạng u_i và các biến chuyển vị hierarchical a_j

$$u = N_i u_i + N_j a_j = \hat{N} \hat{u} \quad (2)$$

Trên cơ sở các yếu tố $\{(\xi, \eta) | -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}$, ta lập được các cạnh, đỉnh, mặt. Các đa thức hierarchical của đã trở nên đơn giản gồm các hàm dạng bên trong.



Hình 1. Phần tử tứ giác bốn nút

2.1 Hàm dạng đỉnh

Bốn đỉnh là các hàm tuyến tính.

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \quad N_1(\eta) = \frac{1-\eta}{2}, \quad N_2(\eta) = \frac{1+\eta}{2}$$

$$N_1^k = N_1(\xi)N_1(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta);$$

$$N_2^k = N_2(\xi)N_1(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (3)$$

$$N_3^k = N_2(\xi)N_2(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta);$$

$$N_4^k = N_1(\xi)N_2(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

2.2 Hàm dạng cạnh

Hàm dạng của các cạnh ($p \geq 2, 4(p-1)$) hàm dạng (các cạnh) kết hợp với các nút giữa.

$$N_{Ei}^k(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad (4)$$

Trong đó E đề cập đến thực tế rằng đây là các cạnh, k là bậc đa thức của các yếu tố, i là số cạnh. Chúng được viết thành:

$$N_{E1}^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta)N^k(\xi);$$

$$N_{E2}^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)N^k(\eta)$$

$$N_{E3}^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\eta)N^k(\xi); \quad (5)$$

$$N_{E4}^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)N^k(\eta), k = 2, 3, \dots, p$$

2.3 Hàm dạng mặt

Hàm dạng mặt ($p \geq 4$, $(p-2)(p-3)/2$) kết hợp với các nút trọng tâm của 9 nút Chúng còn được gọi là các hàm ảo.

$$N_9^{4,0,0} = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (6)$$

Các hàm dạng còn lại là $N_9^{4,0,0}$ và các đa thức Legendre như:

$$\begin{aligned} N_9^{5,1,0} &= N_9^{4,0,0} P_1(\xi), & N_9^{5,0,1} &= N_9^{4,0,0} P_1(\eta), \\ N_9^{5,1,0} &= N_9^{4,0,0} P_1(\eta), & N_9^{6,2,0} &= N_9^{4,0,0} P_2(\xi), \\ N_9^{6,0,2} &= N_9^{4,0,0} P_2(\eta), & N_9^{6,1,1} &= N_9^{4,0,0} P_1(\xi)P_1(\eta) \\ N_9^{7,3,0} &= N_9^{4,0,0} P_3(\xi), & N_9^{7,0,3} &= N_9^{4,0,0} P_3(\eta), \\ N_9^{7,2,1} &= N_9^{4,0,0} P_2(\xi)P_1(\eta), & N_9^{7,1,2} &= N_9^{4,0,0} P_1(\xi)P_2(\eta), \\ N_9^{8,4,0} &= N_9^{4,0,0} P_4(\xi), & N_9^{8,0,4} &= N_9^{4,0,0} P_4(\eta), \\ N_9^{8,3,1} &= N_9^{4,0,0} P_3(\xi)P_1(\eta), & N_9^{8,1,3} &= N_9^{4,0,0} P_1(\xi)P_3(\eta), \\ N_9^{8,2,2} &= N_9^{4,0,0} P_2(\xi)P_2(\eta), \end{aligned} \quad (7)$$

Các yếu tố chủ yếu liên quan, nội suy $u(\xi, \eta)$ được viết theo:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^4 d_j N_{C_j} + \sum_{k=2}^p \left[\sum_{j=1}^4 d_j^k N_{E_j}^k \right] \\ &+ \sum_{k=4}^p \sum_{\lambda+\mu=k-4} d_9^{k,\lambda,\mu} N_9^{k,\lambda,\mu} \end{aligned} \quad (8)$$

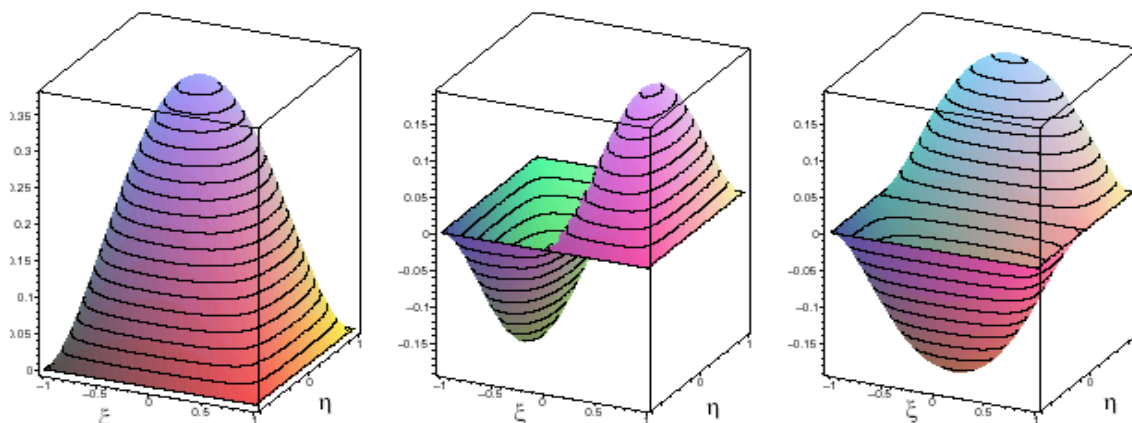
Số lượng các phương trình liên kết với một biến gồm các giải pháp như số bậc tự do cho đỉnh, cạnh, mặt. Số lượng các phương trình liên quan với nhau để đa thức được đưa ra trong **Bảng 1**.

Bảng 1. Bảng biểu đồ số bậc tự do cho phần tử giác.

P	Các nút	Các cạnh	Các mặt	Tổng cộng
1	4			4
2	4	4		8
3	4	8		12
4	4	12	1	17
5	4	16	3	23
6	4	20	6	30
7	4	24	10	38
8	4	28	15	47

Các yếu tố chủ yếu liên quan, nội suy $u(\xi, \eta)$ được thể hiện:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^4 d_j N_{C_j} + \sum_{k=2}^p \left[\sum_{j=1}^4 d_j^k N_{E_j}^k \right] \\ &+ \sum_{k=4}^p \sum_{\lambda+\mu=k-4} d_9^{k,\lambda,\mu} N_9^{k,\lambda,\mu} \end{aligned} \quad (9)$$



Hình 2. $N_9^{4,0,0}$ (left), $N_9^{5,1,0}$ (middle), $N_9^{6,2,0}$ (right)

3. ỨNG DỤNG

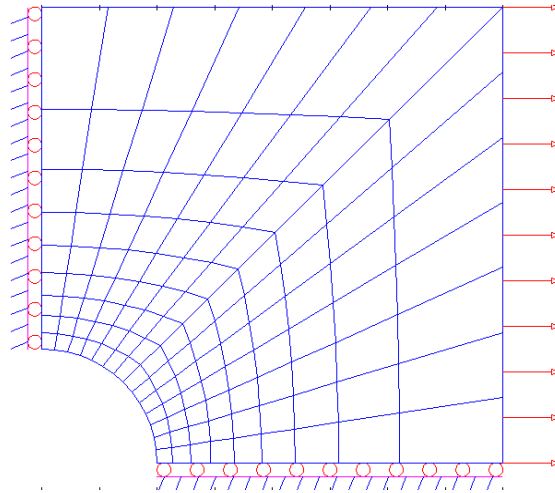
Khảo sát tấm thép có:

- Chiều rộng $a = 5$ mm, chiều cao $b = 5$ mm, độ dày $t = 1$ mm, vòng tròn có $R=1$ mm,

- Mô đun đàn hồi vật liệu $E = 2 \cdot 10^9$ MPa
- Hệ số Poisson $\nu = 0.3$

Bài toán phân tích tĩnh nhằm đánh giá độ tin cậy của giải thuật tác giả, mô hình chia

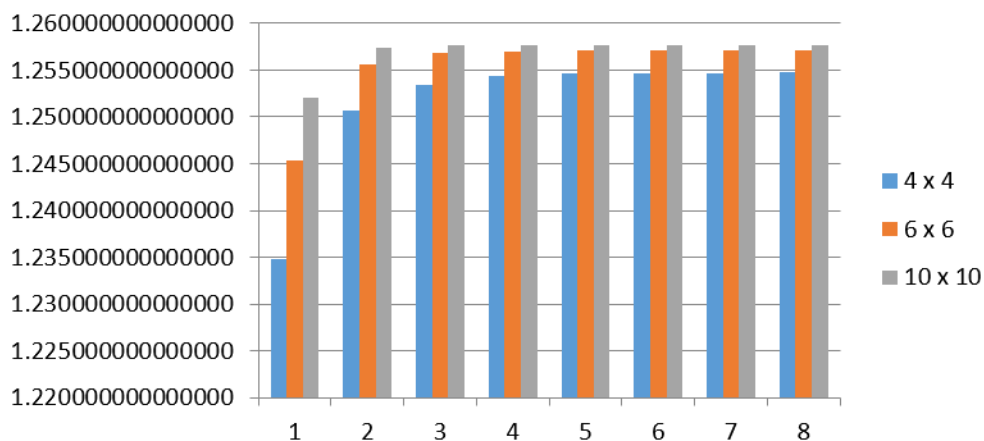
lưới phân tử sẽ được trình bày trong **Hình 3**, sự chênh lệch giữa kết quả tác giả và năng
 Kết quả của năng lượng biến dạng sẽ được trình bày trong Bảng 2 và Hình 4 sẽ cho thấy
 lượng chính xác.



Hình 3. Mô hình tấm 2D chịu tác dụng của lực kéo

Bảng 2. Năng lượng

p	4 x 4	6 x 6	10 x 10
1	1.234781201678460	1.24539352047314	1.252090794826700
2	1.250643944762530	1.25560416492487	1.257338757220810
3	1.253472086993030	1.25686799779477	1.257663905027610
4	1.254432185801750	1.25704426855534	1.257681896607770
5	1.254601201840920	1.25706108629326	1.257682897884160
6	1.254659470373570	1.25706650402698	1.257683447121430
7	1.254711480398780	1.25707242680776	1.257684113912230
8	1.254760072521120	1.25707872801340	1.257684853657300

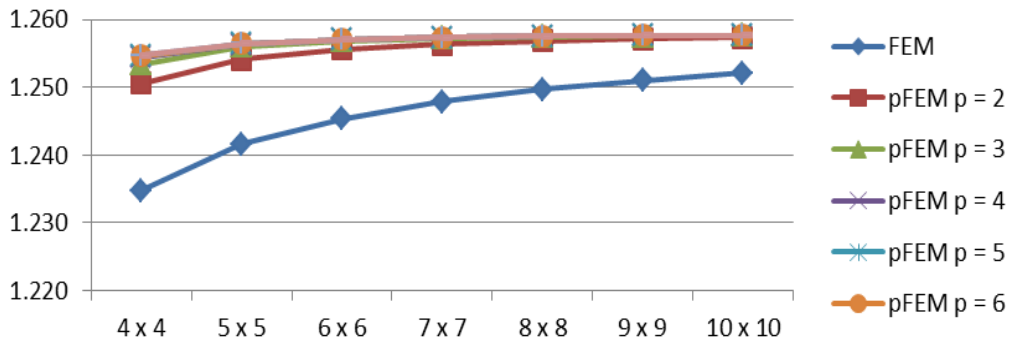


Hình 4. Biểu đồ kết quả U

Nhận xét:

Từ các số liệu trong **Bảng 2** cho thấy với lưới phần tử có kích thước lưới là 4 x 4, 6 x 6 và 10x10ta thấy được sự sai số của năng lượng có sự chênh lệch. Tuy nhiên khi so sánh với năng lượng chính xác chúng ta có thể nhận thấy được sự sai số đáng kể khi ta

chia lưới nhỏ và lưới lớn cũng như sự làm mịn lưới ảnh hưởng đến sự thật thoát năng lượng. Việc thay đổi lưới mịn hơn dẫn đến kết quả hội tụ tốt hơn, cũng như sai số do tính toán sẽ ít hơn, kết quả cho ra chính xác và đáng tin cậy hơn so với FEM.



Hình 5. Biểu đồ kết quả sai số

Để đánh giá sự hội tụ và cũng như sai số của FEM so với các HFEM, tác giả sẽ khảo sát sai số của FEM và HFEM qua các lưới

khác nhau, kết quả được cho trong **Bảng 3** và đồ thị đánh giá sai số theo từng bậc đa thức được thể hiện trong **hình 5**.

Bảng 3. Sai số của HFEM và FEM

	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8	9 x 9	10 x 10
FEM	1.234781202	1.241594256	1.245393520	1.247900421	1.249697102	1.251046321	1.252090795
HFEM p = 2	1.250643945	1.254125082	1.255604165	1.256389336	1.256853028	1.257145466	1.257338757
HFEM p = 3	1.253472087	1.255997714	1.256867998	1.257260717	1.257467380	1.257587983	1.257663905
HFEM p = 4	1.254432186	1.256372919	1.257044269	1.257352008	1.257517961	1.257617512	1.257681897
HFEM p = 5	1.254601202	1.256419337	1.257061086	1.257359142	1.257521354	1.257619283	1.257682898
HFEM p = 6	1.254659470	1.256433948	1.257066504	1.257361678	1.257522738	1.257620122	1.257683447
HFEM p = 7	1.254711480	1.256448697	1.257072427	1.257364597	1.257524379	1.257621133	1.257684114
HFEM p = 8	1.254760073	1.256463771	1.257078728	1.257367765	1.257526180	1.257622251	1.257684854

Nhận xét:

Từ bảng số liệu chuyển vị U bảng (1) và sai số bảng (2) ta dễ dàng thấy được xét dưới dạng tấm 2D sự chia lưới của FEM thay đổi đáng kể nhưng mức độ sai số của pFEM thì không nhiều. Từ biểu đồ sai số của pFEM chúng ta có thể kết luận rằng sự sai số và tốc độ hội tụ của pFEM tốt hơn.

4. KẾT LUẬN

Trong bài tác giả đã tiến hành phân tích các tấm dưới dạng 2D. Kết quả từ HFEM được so sánh với những FEM để chứng minh hiệu quả và độ chính xác của HFEM. Thường phần tử của phương pháp phần hữu hạn được phát triển bằng Mindlin bao gồm bốn nút, trong đó mỗi nút có năm bậc tự do.

Việc xây dựng hierarchical cải thiện khả năng của các phần tử bằng cách làm cho mức độ xấp xỉ đa thức để có xu hướng đến vô cùng.

Các chương trình liên quan đến tính công thức và đa thức thực hiện bằng việc sử dụng phần mềm MATLAB. Các thuộc tính phần tử như ma trận độ cứng và chuyển vị đã được tính toán bằng số sử dụng các thông số khảo sát từ thực tiễn cũng như các công trình nghiên cứu khác. Những đến tỉ lệ, mô đun

đàn hồi ảnh hưởng cắt tỷ lệ mô đun, cấu hình và điều kiện biên được xem xét trong nghiên cứu tham số. Các công việc thực hiện luận văn đã cung cấp một số kết luận về việc thực hiện của các công thức HFEM dựa trên lý thuyết biến dạng để cắt. Độ chính xác có thể thu được bằng cách tăng số lượng của các phần tử. Một so sánh của FEM và HFEM có thể chứng minh được sự chính xác cũng như khác năng hội tụ của HFEM vượt trội hơn so với FEM.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ambantsumyan, S A. "Theory of anisotropic shells", NASA Report, 1966, TTF-118.
- [2] Whitney, JM. "Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates", Journal of Composite materials, Vol. 6, 1972, pp.426-440.
- [3] Lo, KH. Christensen, R Ma, Wu, EM. "A higher order theory of plates deformation. Part 2: Laminated plates", Journal of Applied Mechanics, vol. 44. 1977, pp 669-676.
- [4] J.E Aston, J.M Whitney. "Theory of Laminated Plates", Technomic, 1970.
- [5] S.W Tsai, H.T Hahn. "Introduction to Composite Materials", Technomic, 1980.

Tác giả chịu trách nhiệm bài viết:

Hứa Thành Luân

Trường Sư Phạm Kỹ Thuật Thành Phố Hồ Chí Minh

Email: huathanhluan1404@gmail.com