

## CẢI TIẾN PHẦN TỬ VỎ KHỐI TỨ GIÁC 8 NÚT BẰNG KỸ THUẬT KHỬ KHÓA MÀNG MITC4+ DÙNG PHÂN TÍCH TÍNH KẾT CẤU TẤM/VỎ

### IMPROVEMENT ON 8-NODE QUADRILATERAL SOLID-SHELL ELEMENTS BY USING MITC4+ TECHNIQUE TO REMOVE MEMBRANE LOCKING FOR STATIC ANALYSES OF PLATE/SHELL STRUCTURES

Lê Trần Nhật, Châu Đình Thành

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM, Việt Nam

Ngày toà soạn nhận bài 28/6/2017, ngày phản biện đánh giá 2/8/2017, ngày chấp nhận đăng 5/10/2017

#### TÓM TẮT

Phân tích kết cấu tấm/vỏ bằng phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút sẽ xảy ra hiện tượng khóa cắt, khóa màng và khóa hình thang do sử dụng hàm xấp xỉ chuyển vị dạng  $C^0$ . Để khắc phục các hiện tượng khóa này, các trường biến dạng uốn, biến dạng màng và biến dạng thẳng theo phương chiều dày được xấp xỉ lại thông qua giá trị biến dạng tại các điểm buộc được xác định trước. Trong bài báo này, ngoài việc khử khóa cắt và khóa hình thang, phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút, gọi là  $S8+$ , còn được khử khóa màng dựa trên kỹ thuật MITC4+ được phát triển cho phần tử vỏ suy biến tứ giác 4 nút[1]. Phân tích tĩnh của một số bài toán tấm/vỏ điển hình được trình bày. Kết quả số cho thấy, khi sử dụng cùng số phần tử, phần tử  $S8+$  cho kết quả chuyển vị tốt hơn so với kết quả cho bởi các loại phần tử vỏ tứ giác và tam giác khác.

**Từ khóa:** tấm/vỏ; phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút; kỹ thuật MITC4+; khóa màng; phân tích tĩnh.

#### ABSTRACT

Analyses of plate/shell structures by using 8-node quadrilateral solid-shell elements often lead to the phenomena of shear, membrane and trapezoidal lockings due to the  $C^0$ -type displacement approximation. To overcome these locking phenomena, the bending strains, membrane strains and normal strains in the thickness direction are separately interpolated from values of these strains at pre-defined typing points. In this paper, beside removing the bending and trapezoidal lockings, the present 8-node quadrilateral solid-shell elements, namely  $S8+$ , are also eliminated the membrane locking based on the MITC4+ technique developed for the 4-node quadrilateral degenerated shell elements[1]. Static analyses of some benchmark plate/shell structures are presented. Numerical results show that when using the same number of elements, the  $S8+$  elements can give better displacements than those provided by other quadrilateral and triangular shell elements.

**Keywords:** plate/shell; 8-node quadrilateral solid-shell elements; MITC4+ technique; membrane locking, static analyses.

#### 1. GIỚI THIỆU

Tấm/vỏ là kết cấu được sử dụng rất phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng, xây dựng công nghiệp, máy bay, tàu biển, ô tô, do có nhiều ưu điểm vượt trội về khả năng chịu lực và thẩm mỹ. Do đó, việc tính toán chính xác ứng xử của các kết cấu tấm/vỏ có hình dạng, tải trọng và điều kiện biên bất kỳ

là rất cần thiết và được giải quyết bằng các phương pháp số.

Hiện nay có rất nhiều phương pháp số khác nhau được phát triển để giải quyết bài toán tấm/vỏ nhưng phương pháp phần tử hữu hạn (PPPTH) vẫn là phương pháp phổ biến và hiệu quả nhất. Trong đó, các công thức PTHH xây dựng cho lý thuyết tấm/vỏ biến

dạng cắt bậc nhất rồi dùng các kỹ thuật loại bỏ các hiện tượng biến dạng vượt trội thường được sử dụng do chỉ cần hàm xấp xỉ chuyển vị dạng  $C^0$  và có thể dùng để phân tích kết cấu tấm/vỏ dày hoặc mỏng. Theo hướng phát triển này, các công thức PTHH tấm/vỏ có thể được chia thành 3 loại: phần tử vỏ phẳng (flat shell), phần tử vỏ suy biến (degenerated continuum mechanics shell) và phần tử vỏ khối (solid shell)[2]. Phần tử vỏ phẳng và phần tử vỏ suy biến tính toán các ứng xử trên mặt trung bình của phần tử nên ngoài chuyển vị thẳng cần có góc xoay. Ứng xử trong phần tử vỏ phẳng là sự kết hợp thuận túy giữa ứng xử của phần màng và phần uốn nên không thể hiện được sự tương tác giữa màng và uốn. Để khắc phục vấn đề này, ứng xử trong phần tử vỏ suy biến được xây dựng từ lý thuyết biến dạng 3 chiều được hiệu chỉnh sao cho biến dạng thẳng theo phương vuông góc với mặt trung bình của vỏ bằng 0. Trong phần tử vỏ khối, ứng xử được xây dựng hoàn toàn từ lý thuyết biến dạng 3 chiều nên bậc tự do của phần tử vỏ khối chỉ gồm các chuyển vị thẳng, không có góc xoay. Vì vậy, phần tử vỏ khối rất dễ kết nối với các loại phần tử khác và có thể xét đến sự thay đổi của biến dạng thẳng theo phương vuông góc với mặt trung bình của vỏ.

Phần tử vỏ khối tứ giác đơn giản nhất là phần tử 8 nút vì xấp xỉ trường chuyển vị được xây dựng từ các hàm dạng  $C^0$ . Tuy nhiên, biến dạng cắt thuận túy tính từ xấp xỉ chuyển vị dạng  $C^0$  sẽ không thể bằng 0 và dẫn đến hiện tượng khóa cắt khi phân tích các kết cấu tấm/vỏ mỏng. Để loại bỏ hiện tượng khóa cắt, các phương pháp xấp xỉ lại trường biến dạng cắt đã được phát triển thành công bởi nhiều tác giả như xấp xỉ biến dạng tự nhiên (ANS)[3], xấp xỉ biến dạng nâng cao (EAS) [4] hoặc xấp xỉ phối hợp các thành phần ten-xơ ứng suất (MITC)[5]. Thêm nữa, khi rời rạc các kết cấu vỏ có độ cong lớn thì các phần tử vỏ khối có dạng hình thang sẽ sinh thêm ứng suất pháp theo phương chiều dày và dẫn đến hiện tượng gọi là khóa hình thang. Tương tự kỹ thuật khử khóa cắt, trường biến dạng thẳng theo phương chiều dày của vỏ cũng được xấp xỉ lại để loại bỏ

hiện tượng khóa hình thang[6]. Phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút khử khóa cắt và khóa màng đã được áp dụng thành công trong việc phân tích các kết cấu tấm/vỏ đồng nhất, composite đàn hồi tuyến tính, phi tuyến.

Đối với phần tử vỏ tứ giác, hiện tượng khóa màng xảy ra khi các nút của phần tử không đồng phẳng. Đặc biệt, khi kết cấu vỏ có hình dáng phức tạp chia lưới phần tử không đều nhau thì hiện tượng khóa màng càng ảnh hưởng nhiều đến độ chính xác của phần tử. Nhằm loại bỏ hiện tượng khóa màng, một số tác giả xây dựng công thức phần tử vỏ dựa trên mô hình toán học biểu diễn chính xác mặt trung bình vỏ[7]. Tuy nhiên, cách tiếp cận này không tổng quát cho tất cả các trường hợp vỏ có hình dáng và điều kiện biên bất kỳ. Gần đây, Ko và cộng sự[1] đã phát triển công thức xấp xỉ trường biến dạng màng có khả năng khử khóa màng dựa trên cách tiếp cận MITC cho phần tử vỏ suy biến tứ giác 4 nút. Kết quả, phần tử MITC4+ có khả năng vượt qua các điều kiện kiểm tra cơ bản của phần tử vỏ (patch tests) và có độ hội tụ tốt khi phân tích các bài toán vỏ phức tạp, thậm chí với lưới không đều.

Trong nghiên cứu này, ngoài việc khử khóa cắt và khóa hình thang, công thức PTHH vỏ khối tứ giác 8 nút còn được bổ sung thêm kỹ thuật khử khóa màng. Muốn vậy, biến dạng màng trong phần tử vỏ khối sẽ được xấp xỉ lại theo công thức xấp xỉ biến dạng màng của phần tử vỏ suy biến tứ giác 4 nút MITC4+. Công thức PTHH vỏ khối tứ giác 8 nút S8+ này cho kết quả hội tụ tốt hơn một số phần tử vỏ khác khi phân tích tĩnh một số bài toán tấm/vỏ.

Trong phần tiếp theo của bài báo, công thức PTHH vỏ khối tứ giác 8 nút được trình bày. Tính chính xác và hiệu quả của phần tử S8+ được kiểm tra và đánh giá ở phần ví dụ số. Cuối cùng, một vài kết luận được rút ra.

## 2. CÔNG THỨC PHẦN TỬ HỮU HẠN VỎ KHỐI TỨ GIÁC 8 NÚT S8+

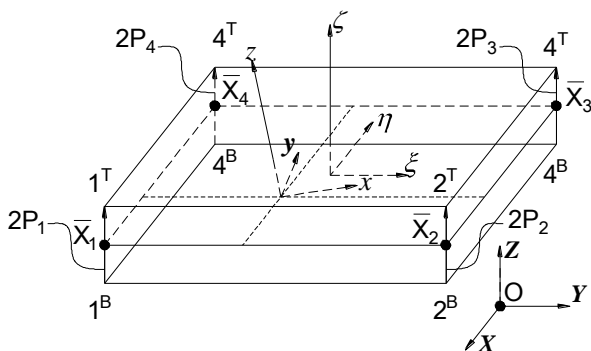
### 2.1 Xấp xỉ hình học và chuyển vị[8]

Xét phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút như *Hình 1*. Trong hệ trục tọa độ toàn cục  $OXYZ$ ,

tọa độ của 1 điểm nằm trong phần tử có thể được biểu diễn bởi véc-tơ  $\mathbf{X}$  được xác định như sau:

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \zeta \mathbf{P} \quad (1)$$

Trong đó,  $\bar{\mathbf{X}}$  là véc-tơ vị trí của mặt trung bình phần tử,  $\mathbf{P}$  là véc-tơ có giá trị bằng một nửa véc-tơ nối từ tọa độ nút mặt dưới với tọa độ nút mặt trên của phần tử và  $-1 \leq \zeta \leq 1$  là tọa độ thuộc hệ tọa độ tự nhiên  $\xi\eta\zeta$ .



**Hình 1.** Hình dạng hình học phần tử vỏ khối

Véc-tơ  $\bar{\mathbf{X}}$  và  $\mathbf{P}$  được xấp xỉ thông qua các giá trị tại nút phần tử bởi công thức:

$$\bar{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^4 N_i \bar{\mathbf{X}}_i \quad (2)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{P}_i \quad (3)$$

Với  $N_i(\xi, \eta)$  là các hàm dạng  $C^0$  được định nghĩa trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$N_1 = 0,25(1-\xi)(1-\eta); N_2 = 0,25(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = 0,25(1+\xi)(1+\eta); N_4 = 0,25(1-\xi)(1+\eta)$$

Và

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_i^T + \mathbf{X}_i^B) \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_i^T - \mathbf{X}_i^B) \quad (5)$$

Trong đó,  $\mathbf{X}_i^T$  và  $\mathbf{X}_i^B$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) lần lượt là tọa độ nút ở mặt trên và mặt dưới của phần tử (xem Hình 1).

Thế công thức(2), (3) vào (1), véc-tơ  $\mathbf{X}$  có thể được viết lại như sau:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 N_i [\bar{\mathbf{X}}_i + \zeta \mathbf{P}_i] \quad (6)$$

Để thuận lợi cho việc thiết lập các quan hệ biến dạng – chuyển vị và ứng suất – biến dạng, hệ trục tọa độ cục bộ  $oxyz$  trong từng phần tử được xây dựng với các véc-tơ cơ sở theo phương  $x, y,$  và  $z$  lần lượt là  $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y$  và  $\mathbf{R}_z$  được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{R}_z = \frac{\mathbf{R}_\xi \times \mathbf{R}_\eta}{|\mathbf{R}_\xi \times \mathbf{R}_\eta|}, \mathbf{R}_x = \frac{\mathbf{R}_\zeta}{|\mathbf{R}_\zeta|}, \mathbf{R}_y = \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_x \quad (7)$$

Với

$$\mathbf{R}_\xi = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right|_{\zeta=0} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \bar{\mathbf{X}}_i \quad (8a)$$

$$\mathbf{R}_\eta = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \right|_{\zeta=0} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \bar{\mathbf{X}}_i \quad (8b)$$

Trường chuyển vị trong hệ trục tọa độ cục bộ  $oxyz$  được xấp xỉ như sau:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \zeta \boldsymbol{\rho} = \sum_{i=1}^4 N_i (\bar{\mathbf{u}}_i + \zeta \boldsymbol{\rho}_i) \quad (9)$$

Trong đó,  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$  là véc-tơ chứa các thành phần chuyển vị thẳng theo phương  $x, y, z,$   $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z]^T$  là véc-tơ chuyển vị trên mặt trung bình,  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]^T$  là một nửa véc-tơ nối chuyển vị nút dưới và nút trên của phần tử và:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = [\bar{u}_{xi}, \bar{u}_{yi}, \bar{u}_{zi}]^T = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^T + \mathbf{u}_i^B) \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\rho}_i = [\rho_{xi}, \rho_{yi}, \rho_{zi}]^T = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^T - \mathbf{u}_i^B) \quad (11)$$

Với  $\mathbf{u}_i^T$  và  $\mathbf{u}_i^B$  lần lượt là véc-tơ chuyển vị trong hệ trục tọa độ cục bộ của các nút ở mặt trên và mặt dưới của phần tử.

Quan hệ giữa tọa độ nút  $\mathbf{X}$  và chuyển vị nút  $\mathbf{U}$  trong hệ tọa độ toàn cục  $OXYZ$  với tọa độ nút  $\mathbf{x}$  và chuyển vị nút  $\mathbf{u}$  trong hệ tọa độ cục bộ  $oxyz$  được cho bởi công thức sau:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^T \mathbf{X} \text{ hoặc } \mathbf{X} = \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (12a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^T \mathbf{U} \text{ hoặc } \mathbf{U} = \mathbf{H} \mathbf{u} \quad (12b)$$

$$\text{Với ma trận chuyển trục } \mathbf{H} = [\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z] \quad (13)$$

## 2.2 Quan hệ giữa biến dạng-chuyển vị [8]

Từ xấp xỉ chuyển vị cho bởi (9), các thành biến dạng trong hệ tọa độ cục bộ được xác định như sau:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \rho_x}{\partial x} \quad (14a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \rho_y}{\partial y} \quad (14b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \zeta \frac{\partial \rho_z}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \rho_z \quad (14c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \zeta \left( \frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \frac{\partial \rho_y}{\partial x} \right) \quad (14d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \zeta \left( \frac{\partial \rho_x}{\partial z} + \frac{\partial \rho_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \rho_x \quad (14e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \zeta \left( \frac{\partial \rho_y}{\partial z} + \frac{\partial \rho_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \rho_y \quad (14f)$$

Trường biến dạng cho bởi (14) có thể viết lại:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} & \varepsilon_z & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \varepsilon_{zz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_q \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Trong đó, biến dạng màng  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ , biến dạng uốn  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  và biến dạng cắt ngoài mặt phẳng  $\boldsymbol{\varepsilon}_q$  được định nghĩa bởi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} & \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_x}{\partial x} & \frac{\partial \rho_y}{\partial y} & \frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \frac{\partial \rho_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \zeta \left( \frac{\partial \rho_x}{\partial z} + \frac{\partial \rho_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \rho_x + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} + \zeta \left( \frac{\partial \rho_y}{\partial z} + \frac{\partial \rho_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \rho_y + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Thế xấp xỉ chuyển vị cho bởi (9), (10), (11) vào các công thức biến dạng, ta có thể xác định được quan hệ giữa biến dạng và các chuyển vị nút  $\mathbf{q}_e$  của phần tử trong hệ tọa độ cục bộ như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{q}_e; \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \mathbf{q}_e; \boldsymbol{\varepsilon}_q = \mathbf{B}_q \mathbf{q}_e; \varepsilon_{zz} = \mathbf{B}_z \mathbf{q}_e \quad (19)$$

Trong đó,  $\mathbf{q}_e = [\mathbf{q}_{e1}^T \mathbf{q}_{e2}^T \mathbf{q}_{e3}^T \mathbf{q}_{e4}^T]^T$

với  $\mathbf{q}_{ei} = [u_{xi}^B u_{yi}^B u_{zi}^B u_{xi}^T u_{yi}^T u_{zi}^T]^T$  và  $\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_b, \mathbf{B}_q, \mathbf{B}_z$  là các ma trận quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị.

## 2.3 Kỹ thuật khử khóa màng, khóa cắt và khóa hình thang

Nếu sử dụng các trường biến dạng cho bởi công thức (19) được xác định thuần túy từ xấp xỉ chuyển vị dạng  $C^0$  thì công thức PTHH của phần tử vỏ khối sẽ xuất hiện các ứng suất tăng thêm dẫn đến sai lệch kết quả tính toán, gọi là các hiện tượng khóa. Để khắc phục các hiện tượng khóa màng, khóa cắt và khóa hình thang, các trường biến dạng, biến dạng cắt và biến dạng thẳng theo chiều dày trong hệ tọa độ tự nhiên sẽ được xấp xỉ thông qua các giá trị biến dạng tương ứng tính tại các điểm buộc được thiết kế trước.

Để có thể tính lại được ma trận quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ từ xấp xỉ biến dạng trong hệ trục tọa độ tự nhiên, ta cần biểu diễn quan hệ giữa biến dạng trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tự nhiên như sau [8]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\zeta\zeta} & \gamma_{\xi\eta} & \gamma_{\xi\zeta} & \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix}^T = \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

Trong đó,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} I_{11}^2 & I_{21}^2 & I_{31}^2 & I_{11}I_{21} & I_{11}I_{31} & I_{21}I_{31} \\ I_{12}^2 & I_{22}^2 & I_{32}^2 & I_{11}I_{22} & I_{12}I_{32} & I_{22}I_{32} \\ I_{13}^2 & I_{23}^2 & I_{33}^2 & I_{13}I_{23} & I_{13}I_{33} & I_{23}I_{33} \\ 2I_{11}I_{12} & 2I_{21}I_{22} & 2I_{31}I_{32} & I_{12}I_{21} + I_{11}I_{22} & I_{12}I_{31} + I_{11}I_{32} & I_{22}I_{31} + I_{21}I_{32} \\ 2I_{11}I_{13} & 2I_{21}I_{23} & 2I_{31}I_{33} & I_{23}I_{11} + I_{21}I_{13} & I_{13}I_{11} + I_{11}I_{13} & I_{23}I_{31} + I_{21}I_{33} \\ 2I_{11}I_{13} & 2I_{11}I_{13} & 2I_{11}I_{13} & I_{23}I_{12} + I_{22}I_{13} & I_{13}I_{32} + I_{12}I_{33} & I_{23}I_{32} + I_{22}I_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Với  $I_{ij}$  là số hạng ở hàng  $i$ , cột  $j$  của ma trận nghịch đảo của ma trận Jacobi  $\mathbf{J}$  được xác định bởi:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

### 2.3.1 Kỹ thuật khử khóa màng

Hiện tượng khóa màng xuất hiện khi phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút có các điểm trên mặt trung bình không đồng phẳng. Để khắc phục hiện tượng này, kỹ thuật khử khóa màng MITC4+ được đề xuất bởi Ko và cộng sự [1] cho phần tử vỏ suy biến tứ giác 4 nút

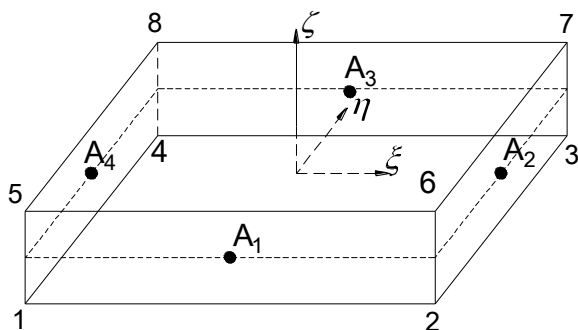
được áp dụng. Theo cách tiếp cận này, các thành phần biến dạng màng trong hệ tọa độ tự nhiên được xấp xỉ lại dựa vào giá trị biến dạng màng tính tại các điểm buộc  $A_1(0,-1,0), A_2(1,0,0), A_3(0,1,0), A_4(-1,0,0)$  (xem **Hình 2**) như sau:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{ij} = & 0,25(\varepsilon_{ij}^{A_1} + \varepsilon_{ij}^{A_2} + \varepsilon_{ij}^{A_3} + \varepsilon_{ij}^{A_4}) \\ & + 0,5(-\varepsilon_{ij}^{A_4} + \varepsilon_{ij}^{A_2})\xi + 0,5(-\varepsilon_{ij}^{A_1} + \varepsilon_{ij}^{A_3})\eta \end{aligned} \quad (23)$$

Trong đó,  $\varepsilon_{ij}^{A_k}$  với  $i = \xi, \eta, j = \xi, \eta$  và  $k = 1..4$  thể hiện các biến dạng màng trong hệ tọa độ tự nhiên tính từ xấp xỉ chuyển vị (9) tại các điểm buộc  $A_k$ .

Từ quan hệ (14) giữa chuyển vị và biến dạng trong hệ tọa độ cục bộ và công thức (20) chuyển biến dạng từ hệ tọa độ cục bộ sang hệ tọa độ tự nhiên, xấp xỉ biến dạng màng (23) theo kỹ thuật MITC4+ có thể biểu diễn bằng quan hệ giữa biến dạng màng trong hệ tọa độ cục bộ và chuyển vị nút phần tử như sau:

$$\tilde{\varepsilon}_m = \tilde{\mathbf{B}}_m \mathbf{q}_e \quad (24)$$



**Hình 2.** Các điểm buộc khử khóa màng, cắt

### 2.3.2 Kỹ thuật khử khóa cắt

Theo phương pháp khử khóa cắt MITC4[5], biến dạng cắt ngoài mặt phẳng trong hệ tọa độ tự nhiên được xấp xỉ lại như sau:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\xi\xi} = & 0,5(1-\eta)\gamma_{\xi\xi}^{A_1} + 0,5(1+\eta)\gamma_{\xi\xi}^{A_3} \\ \tilde{\gamma}_{\eta\xi} = & 0,5(1-\xi)\gamma_{\eta\xi}^{A_2} + 0,5(1+\xi)\gamma_{\eta\xi}^{A_4} \end{aligned} \quad (25)$$

Với  $\gamma_{\xi\xi}^{A_1}, \gamma_{\xi\xi}^{A_3}, \gamma_{\eta\xi}^{A_2}, \gamma_{\eta\xi}^{A_4}$  lần lượt là giá trị của biến dạng cắt ngoài mặt phẳng tính từ xấp xỉ chuyển vị (9) theo các công thức (14) và (20)

tại các điểm buộc có tọa độ trong hệ tự nhiên  $A_1(0,-1,0), A_3(0,1,0), A_2(1,0,0), A_4(-1,0,0)$  như **Hình 2**.

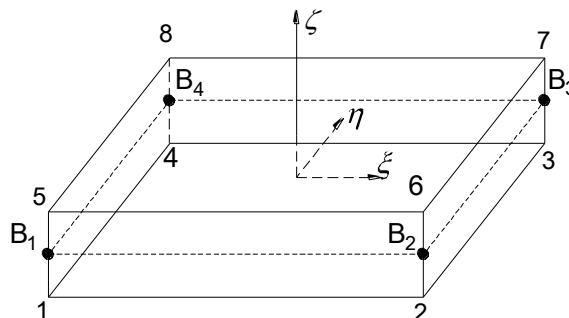
Thế các biến dạng cắt ngoài mặt phẳng được tính theo chuyển vị nút tại các điểm buộc vào xấp xỉ (25), quan hệ giữa biến dạng cắt ngoài mặt phẳng trong hệ tọa độ cục bộ và chuyển vị nút phần tử được viết lại:

$$\tilde{\varepsilon}_q = \tilde{\mathbf{B}}_q \mathbf{q}_e \quad (26)$$

### 2.3.3 Kỹ thuật khử khóa hình thang

Khi vô cong hoặc/và chia lưới không đều sẽ xuất hiện thêm ứng suất pháp theo phương chiều dày vỏ do phần tử có dạng hình thang theo phương chiều dày, gọi là hiện tượng khóa hình thang. Để khắc phục hiện tượng này, biến dạng thẳng  $\varepsilon_{zz}$  được xấp xỉ lại thông qua các giá trị  $\varepsilon_{zz}^{B_1}, \varepsilon_{zz}^{B_2}, \varepsilon_{zz}^{B_3}, \varepsilon_{zz}^{B_4}$  cho bởi xấp xỉ chuyển vị tính tại các điểm buộc  $B_1(-1,-1,0), B_2(1,-1,0), B_3(1,1,0), B_4(-1,1,0)$  (xem **Hình 3**) như sau[6]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{zz} = & 0,25(1-\xi)(1-\eta)\varepsilon_{zz}^{B_1} + 0,25(1+\xi)(1-\eta)\varepsilon_{zz}^{B_2} \\ & + 0,25(1+\xi)(1+\eta)\varepsilon_{zz}^{B_3} + 0,25(1-\xi)(1+\eta)\varepsilon_{zz}^{B_4} \end{aligned} \quad (27)$$



**Hình 3.** Các điểm buộc khử khóa hình thang

Thế quan hệ giữa biến dạng  $\varepsilon_{zz}$  tại các điểm buộc với chuyển vị nút phần tử vào xấp xỉ (27), ta được:

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = \tilde{\mathbf{B}}_z \mathbf{q}_e \quad (28)$$

### 2.4 Ma trận độ cứng phần tử S8+

Từ các công thức (24), (26), (28), sau khi sử dụng các kỹ thuật khử khóa cắt, khóa màng và khóa hình thang, quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị nút phần tử được viết lại:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m + \zeta \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \tilde{\varepsilon}_{zz} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_q \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{q}_e \quad (29)$$

Đối với vật liệu đồng nhất, đẳng hướng, ứng suất được tính từ quan hệ:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \tau_{xy} & \sigma_{zz} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T = \mathbf{C}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (30)$$

Trong đó,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Với  $\bar{\lambda} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  và  $E$ ,  $\nu$  lần lượt là

mô-đun đàn hồi và hệ số Poisson của vật liệu.

Thế quan hệ giữa ứng suất – biến dạng và biến dạng – chuyển vị nút cho bởi (29) và (30) vào nguyên lý công ảo, theo phương pháp PTHH, ma trận độ cứng phần tử  $\mathbf{k}_e$  được xác định như sau[9]:

$$\mathbf{k}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (31)$$

Để tính  $\mathbf{k}_e$ , tích phân số với  $2 \times 2 \times 2$  điểm Gauss được sử dụng, tức là 2 điểm Gauss theo mỗi phương  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

### 3. VÍ DỤ SỐ

Trong phần này, kết quả phân tích một số bài toán tấm vỏ điển hình bằng phần tử S8+ được trình bày. Kết quả phân tích được so sánh với kết quả cho bởi các loại phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút Xsolid84 dựa trên dạng chuyển vị không tương thích[8], Xsolid85 sử dụng kỹ thuật ANS khử khóa cắt và khóa hình thang[8], RH8s-2 kết hợp kỹ thuật làm trơn vào phần tử Xsolid85 [10], và các loại phần tử vỏ phẳng tứ giác MITC4, tam giác MITC3+[11].

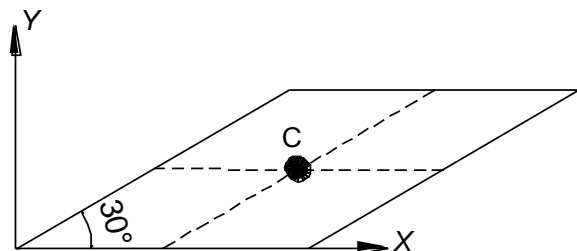
Để khảo sát và so sánh độ hội tụ của các phần tử, kết cấu ở các ví dụ sau được chia lưới đều với  $n_X \times n_Y$  phần tử trong mặt trung

bình và 1 phần phần tử theo phương chiều dày đối với phần tử vỏ khối. Trong đó,  $n_X$ ,  $n_Y$  lần lượt là số phần tử theo phương  $X$  và  $Y$ .

### 3.1 Tấm xiên liên kết tựa đơn bốn cạnh chịu tải phân bố đều

Tấm xiên góc  $30^\circ$  có kích thước mỗi cạnh  $L=100$  và dày  $h=1$  như Hình 4. Tấm tựa đơn 4 cạnh và chịu tải trọng phân bố đều  $q=1$ . Vật liệu làm tấm có mô-đun đàn hồi  $E = 10 \times 10^6$ , và hệ số Poisson  $\nu = 0.3$ .

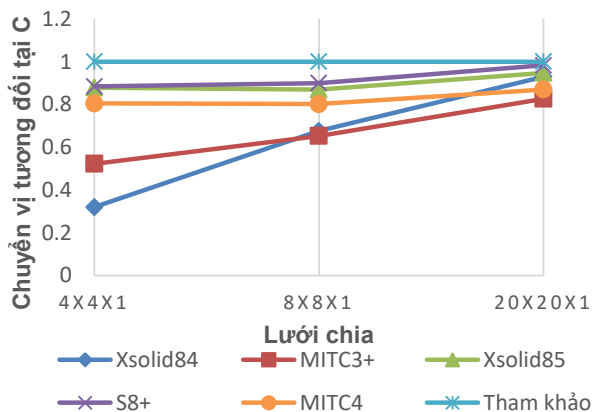
Kết quả tính chuyển vị tại tâm tấm chia cho giá trị chuyển vị tham khảo 0.04455 [8] ứng các loại lưới và phần tử khác nhau được thể hiện trong Bảng 1 và Hình 5. Kết quả cho thấy, với cùng số phần tử, phần tử S8+ cho kết quả gần với lời giải tham khảo hơn các loại phần tử khác. Với lưới chia  $20 \times 20 \times 1$  phần tử, sai số tương đối của kết quả cho bởi phần tử S8+, Xsolid84, MITC3+, Xsolid85, MITC4 với kết quả tham khảo lần lượt là 0.017%, 0.070%, 0.173%, 0.052%, 0.130%.



Hình 4. Tấm xiên liên kết tựa đơn 4 cạnh chịu tải phân bố đều

Bảng 1. Độ võng tương đối tại tâm tấm xiên

Phần tử	Chuyển vị theo số lưới chia		
	4x4x1	8x8x1	20x20x1
Xsolid84	0.320	0.676	0.930
MITC3+	0.523	0.653	0.827
Xsolid85	0.879	0.870	0.948
MITC4	0.805	0.802	0.870
S8+	0.884	0.900	0.983



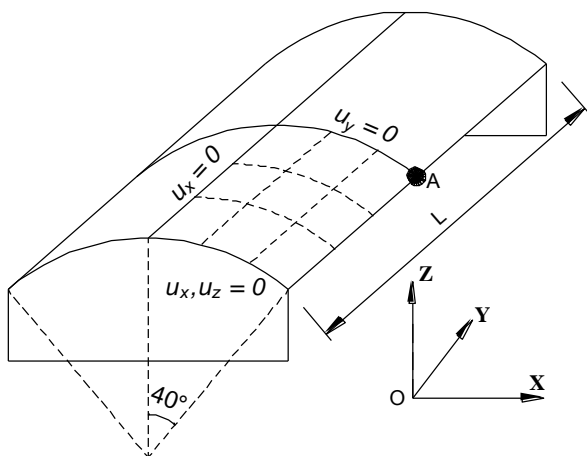
Hình 5. Chuyển vị lớn nhất của tằm xiên theo lưới chia

### 3.2 Mái vòm ngàm phẳng chịu tải trọng lượng bản thân

Mái vòm có chiều dài  $L=50$ , bán kính  $R=25$  và dày  $h=0.25$ . Mái vòm chịu trọng lượng bản thân  $p=90$ , làm bằng vật liệu có  $E=4.32 \times 10^8$  và  $\nu=0$ .

Do tính chất đối xứng nên 1/4 mái được mô phỏng với điều kiện biên được thể hiện trên Hình 6.

Tỉ số giữa chuyển vị thẳng tại điểm A (điểm giữa biên cạnh dài của mái) và kết quả tham khảo 0.3024 [8] cho bởi phần tử S8+ và các loại phần tử khác nhau được trình bày trong Bảng 2. Trong ví dụ này, phần tử S8+ cũng cho giá trị chuyển vị gần với lời giải tham khảo hơn các loại phần tử khác.



Hình 6. Mái vòm ngàm phẳng chịu tải trọng lượng bản thân

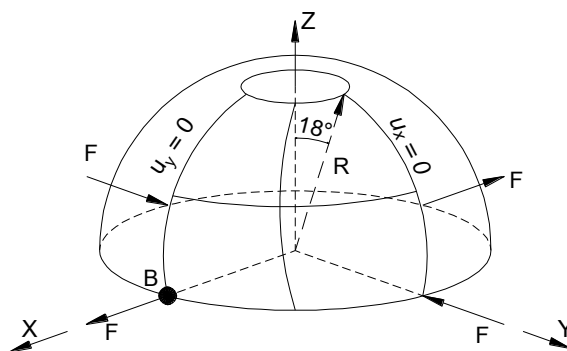
Bảng 2. Chuyển vị tương đối mái vòm tại điểm A

Phần tử	Chuyển vị theo số lưới chia		
	4x4x1	8x8x1	16x16x1
Xsolid84	0.549	0.959	1.003
MITC3+	0.762	0.916	1.014
RH8s-2	1.179	1.680	1.028
MITC4	0.943	0.978	1.008
S8+	0.946	0.980	0.995

### 3.3 Vỏ bán cầu có lỗ mở

Vỏ bán cầu có lỗ mở  $18^\circ$  có bán kính  $R=10$  và dày  $h=0.04$ . Vỏ chịu lực tập trung  $F=2$  như Hình 7 và có  $E=6.825 \times 10^7$ ,  $\nu=0.3$ . Chuyển vị tại vị trí lực tập trung 0.094 [8].

Do tính chất đối xứng nên chỉ cần mô phỏng 1/4 vỏ bán cầu. Điều kiện biên đối xứng xác định như Hình 7, biên trên và biên dưới của vỏ tự do.



Hình 7. Vỏ bán cầu với lỗ mở  $18^\circ$

Bảng 3. Chuyển vị tương đối vỏ bán cầu lỗ mở  $18^\circ$  tại điểm B

Phần tử	Chuyển vị theo số lưới chia		
	8x8x1	16x16x1	20x20x1
Xsolid85	1.005	-	-
MITC3+	1.032	1.012	1.012
RH8s-2	1.003	0.996	0.996
MITC4	0.971	0.988	-
S8+	0.985	0.992	1.000

Kết quả **Bảng 3** cho thấy phần tử S8+ cho kết quả hội tụ tương đương các phần tử khác. Với lưới chia 20x20x1, phần tử S8+ cho kết quả tốt hơn các phần tử khác (độ lệch so với kết quả tham khảo là 0%).

#### 4. KẾT LUẬN

Phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút S8+ bổ sung khử khóa màng theo kỹ thuật MITC4+ cho hiệu quả tính toán tốt hơn các phần tử vỏ suy biến tính trên mặt trung bình MITC3+,

MITC4 và các phần tử vỏ khối tứ giác 8 nút khác chỉ thực hiện khử khóa cắt và khóa hình thang Xsolid84, Xsolid85, thậm chí tốt hơn phần tử vỏ khối kết hợp kỹ thuật làm tròn RH8s-2. Do mô phỏng và tính toán được ứng xử theo phương chiều dày vỏ nên phần tử vỏ khối S8+ có thể dùng để phân tích các kết cấu tấm/vỏ composite có xét ảnh hưởng của ứng suất theo chiều dày, mô phỏng tự tách lớp hay sự hình thành và phát triển vết nứt theo chiều dày tấm/vỏ.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "The MITC4+ shell element and its performance," *Computers & Structures* **169**, 57–68 (2016).
- [2] H. T. Y. Yang, S. Saigal, A. Masud, and R. K. Kapania, "A survey of recent shell finite elements," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **47**, 101–127 (2000).
- [3] K.-J. Bathe and E. N. Dvorkin, "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **21**, 367–383 (1985).
- [4] U. Andelfinger and E. Ramm, "EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **36**, 1311–1337 (1993).
- [5] K.-J. Bathe and E. N. Dvorkin, "A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **22**, 697–722 (1986).
- [6] K. Y. Sze and L. Q. Yao, "A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I—solid-shell element formulation," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **48**, 545–564 (2000).
- [7] G. M. Kulikov and S. V. Plotnikova, "A family of ANS four-node exact geometry shell elements in general convected curvilinear coordinates," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **83**, 1376–1406 (2010).
- [8] K. D. Kim, G. Z. Liu, and S. C. Han, "A resultant 8-node solid-shell element for geometrically nonlinear analysis," *Comput Mech* **35**, 315–331 (2004).
- [9] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures* (Prentice Hall International, Inc., 1996).
- [10] X. J.-G. Élie-Dit-Cosaque, A. Gakwaya, and H. Naceur, "Smoothed finite element method implemented in a resultant eight-node solid-shell element for geometrical linear analysis," *Comput Mech* **55**, 105–126 (2015).
- [11] P. Nguyễn Hoàng, "Phân tích kết cấu vỏ bằng phần tử MITC3+ được làm tròn trên phần tử với hàm Bubble (bCS-MITC3+)" (Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM, 2016).

#### Tác giả chịu trách nhiệm bài viết:

Lê Trần Nhật

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM

Email:trannhat93@gmail.com