

PHÂN TÍCH VÀ DỰ ĐOÁN SỰ PHÁT TRIỂN CỦA VẾT NỨT TRONG TẤM SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP XFEM THE ANALYSIS AND PREDICTION OF CRACK GROWTH IN PLATE BY USING XFEM METHOD

Nguyễn Huỳnh Anh Tuấn¹, Nguyễn Hoài Sơn¹, Chương Thiết Tú^{1,2}
¹Trường ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật Thành Phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
²Trường Cao Đẳng Công Thương, Việt Nam

Ngày toà soạn nhận bài 13/4/2017, ngày phân biện đánh giá 20/4/2017, ngày chấp nhận đăng 02/5/2017.

TÓM TẮT

Cơ học phá hủy là môn khoa học chuyên nghiên cứu về độ bền tuổi thọ của vật liệu, chi tiết máy hoặc cấu kiện khi có các vết nứt. Cho phép định lượng mối quan hệ giữa tính chất cơ lý vật liệu, ứng suất, sự hiện diện của các vết nứt có thể gây phá hủy kết cấu và cơ chế lan truyền các vết nứt. Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) của T. Belytschko đề xuất vào năm 1999 được coi là cách xử lý đặc biệt cho các vấn đề về vết nứt. Trong nội dung của bài báo này tác giả sẽ giới thiệu một phương pháp xác định vết nứt trong tấm dựa trên sự phân tích và dự đoán sự lan truyền của vết nứt qua việc tính các tham số của cơ học nứt như hệ số cường độ ứng suất, dự đoán hướng lan truyền của vết nứt khi có hiện tượng lan truyền

Từ khóa: Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng XFEM; cơ học phá hủy; vết nứt; hệ số cường độ ứng suất; sự lan truyền vết nứt.

ABSTRACT

Fracture Mechanics, which is a science subject, mainly studies about the durable longevity of materials, mechanical components or building components when they have a crack. The method helps quantify the relation between the materials 'nature, tension, and identify the presence of the crack which can destruct the structure and propagation mechanism of the cracks.

The extended finite element method (XFEM) proposed by T. Belytschko in 1999 is regarded as a special cure to crack problems. This paper presents a method to identify cracks in the plates based on the analysis and prediction of crack growth by calculating the parameters of mechanical cracking such as the stress intensity factor, predicted path of the crack when the spread phenomenon appears.

Keywords: Extended finite element method (XFEM); Fracture Mechanics; Cracks; SIF; Growth of cracking.

1. GIỚI THIỆU [1]

Trong cơ học phá hủy, việc tìm ra vết nứt trong tấm là một vấn đề quan trọng nhưng việc tìm ra vết nứt là một điều không dễ dàng, người ta có thể tìm ra vết nứt bằng các máy dò tìm siêu âm, phương pháp đo nhiễu xạ... Khi kết cấu có chứa vết nứt thì các đặc tính của nó như tần số dao động tự nhiên, hình dạng dao động tự do... sẽ bị thay đổi.

Phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng xử lý vết nứt bằng cách mở rộng bậc tự do của những phần tử bị vết nứt cắt ngang, tại đỉnh vết nứt sẽ được thêm vào những hàm mở rộng để tính chuyển vị của các nút thuộc đỉnh vết nứt. Phương pháp này cho phép vết nứt được thể hiện một cách độc lập với lưới phần tử, do đó không cần phải chia lại lưới khi mô hình vết nứt lan truyền.

2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN MỞ RỘNG (XFEM) CHO TÂM PHẪNG [2] [3] [4] [5]

Trong vài năm gần đây, sự xuất hiện của phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng đã cung cấp một công cụ giải quyết một cách hiệu quả các bài toán về phân tích và lan truyền vết nứt dưới giả thuyết của cơ học rạn nứt đàn hồi.

So với phương pháp phần tử hữu hạn thì XFEM tạo ra những thuận lợi trong việc mô phỏng sự lan truyền của vết nứt, phương pháp này dựa trên sự mở rộng của bậc tự do của những nút thuộc phần tử bị chia cắt bởi vết nứt.

Sự khác biệt cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng so với phương pháp phần tử hữu hạn là sự kết hợp những hàm mở rộng vào những phần tử suy biến để tính chuyển vị ở gần đỉnh vết nứt.

2.1 Phương trình cơ bản

Khảo sát miền Ω có biên là Γ bao gồm $\Gamma_u, \Gamma_t, \Gamma_c$ với $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c$

Với Γ_u là biên của chuyển vị; Γ_t là biên của ngoại lực; Γ_c bề mặt kéo tự do (biên vết nứt); t là thời gian.

Phương trình cân bằng được viết như sau: $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^b = 0$ trong miền Ω (1)

Điều kiện biên được mô tả như sau: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}^t$ trên biên Γ_t ; $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ trên biên Γ_u

$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ trên biên Γ_c Với $\boldsymbol{\sigma}$ là tenxơ ứng suất; \mathbf{f}^b là lực khối; \mathbf{f}^t là ngoại lực; \mathbf{n} là vector pháp tuyến đơn vị.

2.2 Xấp xỉ trong phương pháp phần tử mở rộng

Trong bài toán phẳng, xấp xỉ tại một nút sẽ có dạng:

$$u^{(h)}(x) = \sum_{I \in N_c} N_I(x) u_I + \sum_{J \in N_{split}} \bar{N}_J(x) H_J a_J + \sum_{K \in N_{tip}} \bar{N}_K(x) \sum_{\alpha=1}^4 F_{\alpha K} b_{\alpha K} \quad (2)$$

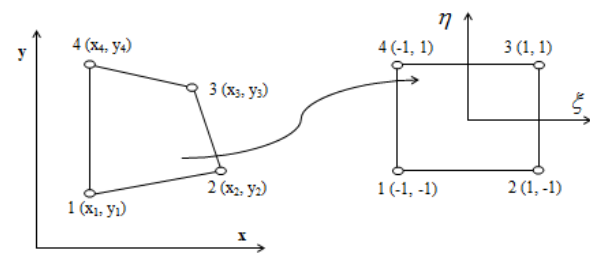
N_e là tập hợp các nút của phần tử bình thường;

N_{split} là tập hợp các nút của phần tử bị cắt bởi vết nứt

N_{tip} là tập hợp các nút của phần tử chứa đỉnh của vết nứt

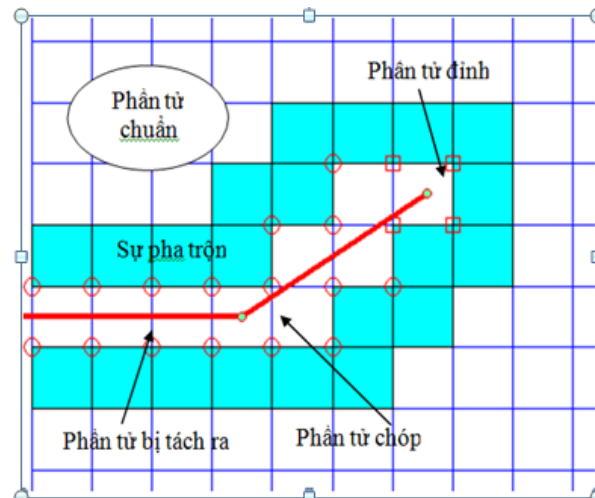
$b_{\alpha K}$ là bậc tự do làm giàu dưới ảnh hưởng của hàm $F_{\alpha K}$ tại nút K

$\bar{N}_K(x)$ là hàm dạng tại đỉnh vết nứt



Hình 1. Phân tử tứ giác trong hệ tọa độ toàn cục và hệ tọa độ địa phương

Lựa chọn tiêu chuẩn của các nút được làm giàu.



Hình 2. Phân chia các nút phần tử

Hàm mở rộng

Hàm Heaviside $\psi(x) = H(\xi)$

Chuyển vị xấp xỉ $u^h(x)$ được viết lại như sau:

$$u^h = \sum_{I \in N_c} N_I u_I + \sum_{J \in N_{enr}} (\bar{N}_J H(\xi) - \bar{N}_J H(\xi_j)) a_J \quad (3)$$

$H_i = 1$ tại vết nứt, $H_i = 0$ tại những nơi khác

Ma trận B được viết lại như sau:

$$B_i^a = \begin{bmatrix} N_{i,x}H & 0 \\ 0 & N_{i,y}H \\ N_{i,y}H & N_{i,x}H \end{bmatrix} \quad (4)$$

Hàm dốc $\psi(x) = |\phi(x)|$

Đạo hàm của hàm $\psi(x)$ được tính $(\psi(x))_{,i} = \text{sign}(\phi(x))\phi_{,i}(x)$, đạo hàm của

$\phi(x)$ theo 2 biến x, y được tính như sau:

$$\phi_{,i}(x) = \begin{bmatrix} N_{1,i} & N_{2,i} & N_{3,i} & N_{4,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (i = x, y) \quad (5)$$

Hàm mở rộng gần đỉnh vết nứt

$$\psi = F_\alpha(r, \theta) \quad (6)$$

2.3 Hệ số cường độ ứng suất

Hệ số cường độ ứng suất là đại lượng đặc trưng cho mức độ tập trung ứng suất tại vùng gần đỉnh vết nứt và được xác định bằng công thức sau:

$$\left\{ \begin{matrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{matrix} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0, \theta = 0} \sqrt{2\pi r} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} \quad (MPa\sqrt{m}) \quad (7)$$

Với σ_{ij} là các ứng suất gần đỉnh vết nứt.

Tương ứng với 3 dạng phá hủy ta sẽ có các hệ số cường độ ứng suất K_I, K_{II}, K_{III} .

Với (7) và $\theta = 0$ ta có:

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} = \sigma \sqrt{2\pi r} \sqrt{\frac{a}{2r}} = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (8)$$

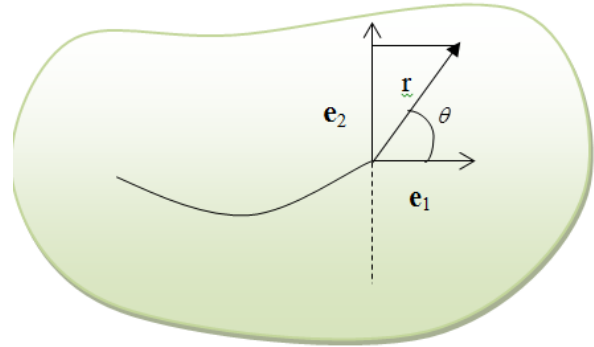
Kết quả (8) chỉ đúng trong trường hợp tấm phẳng vô hạn, đối với trường hợp tấm phẳng hữu hạn với các mô hình nứt khác nhau thì:

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a}$$

Với α là hàm phụ thuộc vào các dạng mô hình nứt khác nhau.

2.4 Sự phát triển của vết nứt trong chất rắn đàn hồi tuyến tính

Xét về sự phát triển của vết nứt, có hai đại lượng cần tính toán đó là góc độ lan truyền và độ dài gia số da đối với phần mới của vết nứt.



Hình 3. Hệ tọa độ cực kết hợp đỉnh vết nứt

Phương trình xác định góc của sự lan truyền vết nứt θ_c được đưa ra:

$$K_I \sin(\theta_c) + K_{II} (3 \cos(\theta_c) - 1) = 0 \quad (9)$$

Giải phương trình (9) sẽ tìm được góc lan truyền θ_c :

$$\theta_c = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]$$

Từ công thức trên, ta có thể thấy rằng nếu $K_{II} = 0$ thì $\theta_c = 0$ (mode I thuần túy), $K_{II} > 0$, $\theta_c < 0$ và $\theta_c > 0$ khi $K_{II} < 0$. Vì thế một biểu thức được đưa ra để tính θ_c như sau:

$$\theta_c = 2 \arctan \left[\frac{-2K_{II} / K_I}{1 + \sqrt{1 + 8(K_{II} / K_I)^2}} \right] \quad (10)$$

Độ dài gia số của vết nứt có thể được xác định bằng việc sử dụng định luật Paris:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m$$

Khi C và m là hằng số vật liệu, được xác định thông qua thí nghiệm thử độ bền mỏi tiêu chuẩn, dN là số vòng $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ là độ biến thiên hệ số cường độ ứng suất.

Trong thực nghiệm có một số công thức để tính ΔK :

$$\Delta K = \sqrt[4]{K_I^4 + 8K_{II}^4} \quad (\text{Tanaka, 1974})$$

$$\Delta K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (\text{Rhee, 1987})$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \cos(\theta/2) K_I (1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta$$

3. KẾT QUẢ SỐ

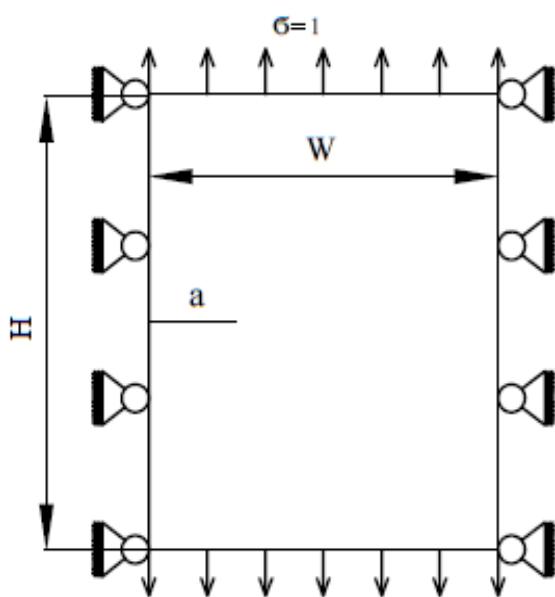
Trong phần này tác giả sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng XFEM để phân tích sự phân bố trường ứng suất tại đỉnh vết nứt và sự phát triển của vết nứt trong tấm 2D với vết nứt ở cạnh

Khảo sát tấm thép có:

- Chiều rộng x cao (W x H) = 5x10 m
- Chiều dài vết nứt a = 1 m
- Mô đun đàn hồi E = 2x10⁶ kPa
- Hệ số poisson $\nu = 0.3$
- Chịu ứng suất kéo đều đơn trục $\sigma = 1$ Mpa

Đối với Tấm phẳng với một vết nứt biên chịu ứng suất kéo đều đơn trục thì hệ số cường độ ứng suất (SIF) được tính theo công thức sau:

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \quad (11)$$

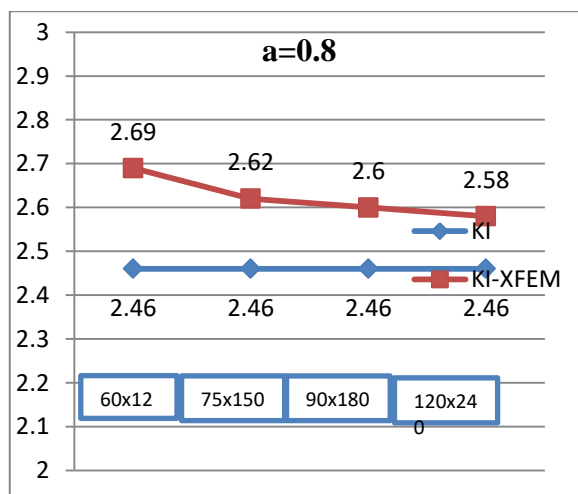


Hình 4. Tấm phẳng có vết nứt cạnh

Kết quả phân tích

Bảng 1. Hệ số mật độ ứng suất KI

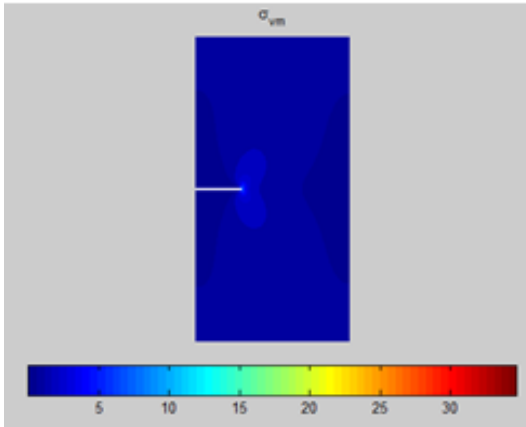
Chiều dài Nứt	Kích thước lưới	KI		
		Giải tích	XFEM	Sai số %
a = 0.4	60x120	1.38	1.51	9.4
	90x180		1.48	7.2
	120x240		1.42	4
a = 0.8	60x120	2.46	2.69	9.34
	75x150		2.62	6.5
	90x180		2.6	5.69
	120x240		2.58	4.87



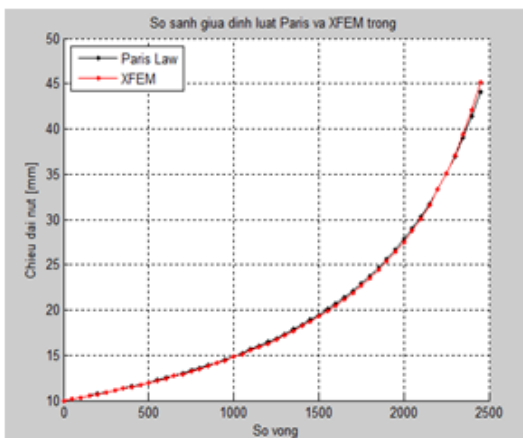
Hình 5. Đồ thị đánh giá mức độ sai số của KI so với giải tích theo lưới phần tử

3.1 Nhận xét:

Từ kết quả thu được ở **Bảng 1** và **Hình 5**, sai số của SIF tính bằng XFEM và lý thuyết là bé. Ngoài ra, qua đồ thị ở **Hình 5** ta thấy được độ chính xác của KI tỉ lệ thuận với kích thước chia lưới (độ mịn), chia lưới độ mịn càng cao thì cho ta kết quả càng chính xác. Từ đó ta có thể lựa chọn cách chia cho phù hợp theo từng mô hình để thu được kết quả chính xác mà không tốn nhiều thời gian và tài nguyên máy tính [6][7].



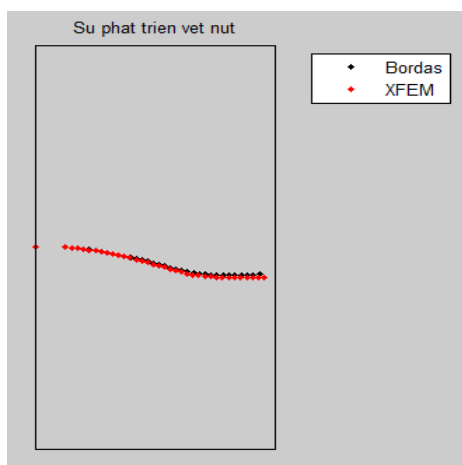
Hình 6. Trường phân bố ứng suất theo Y



Hình 7. So sánh giữa phân tích Paris và XFEM trong tính toán độ dài của vết nứt bằng định luật Paris

3.2 Nhận xét:

Từ kết quả thu được ở Hình 7 cho thấy phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng tương đối chính xác trong tính toán độ dài gia số của vết nứt [8] [9]



Hình 8. So sánh sự phát triển vết nứt giữa XFEM và Bordas

Bảng 2. Sự phát triển vết nứt ở 10 phần tử kế tiếp

Tọa độ nứt tại 10 phần tử kế tiếp					
STT	x	y	STT	x	y
1	1.093	3.9133	6	1.5787	3.7935
2	1.191	3.8929	7	1.6745	3.7647
3	1.289	3.8704	8	1.7698	3.7344
4	1.386	3.8465	9	1.8648	3.7032
5	1.483	3.8208	10	1.9595	3.6711

3.3 Nhận xét:

Từ kết quả thu được ở Hình 8 cho thấy phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng tương đối chính xác trong tính toán sự phát triển của vết nứt so với phương pháp Bordas [10] [11]

4. KẾT LUẬN

- Việc tìm ra khuyết tật trong vật liệu chế tạo kết cấu chi tiết máy và dự đoán khả năng làm việc của kết cấu là một việc cấp thiết. Trong thực tế ngành công nghiệp chế tạo các chi tiết làm ra bao giờ cũng không thể hoàn thiện 100% về cấu trúc, các khuyết tật tồn tại trong sản phẩm sẽ làm suy giảm khả năng chịu tải cơ học của kết cấu, hơn nữa trong quá trình chịu tải cơ học liên tục trong một thời gian dài, vật liệu của kết cấu sẽ có hiện tượng “mỏi” do đó sẽ sinh ra các khuyết tật đặc biệt là những vết nứt sẽ gây phá hủy chi tiết.
- Qua việc tính toán các đại lượng của tấm bằng phương pháp XFEM dùng phần mềm Matlab, trong đó hai đại lượng quan trọng đối với bài toán nứt là hệ số cường độ ứng suất và độ giãn dài của vết nứt cũng được tác giả tính toán và so sánh kết quả tính toán với một số bài báo đã công bố trên các tạp chí. Kết quả tính toán của tác giả có sai số so với các bài đăng trước đó không vượt quá 10%, điều này chứng tỏ mức độ chính xác của mô hình toán mà tác giả xây dựng và phương pháp XFEM là đáng tin cậy.
- Các số liệu tính toán của tác giả là số liệu từ việc phân tích lý thuyết nên chưa

sát với thực tế, vì vậy để kết quả có tính thực tế hơn chúng ta cần phải tiến hành

đo đạc bộ số liệu thực tế và phân tích thêm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Hoài Sơn (chủ biên), “Ứng dụng phương pháp phần tử hữu hạn trong tính toán kết cấu”, NXB Đại học Quốc gia Tp. HCM, 2008
- [2] Franck Haziza (2006) *The Extended Finite Element Method and Its Implementation in 2D in the Aster Code*. Master's Thesis in Numerical Analysis at the Scientific Computing International Master Program, Royal Institute of Technology, Sweden.
- [3] J.E. Tarancon, A. Vercher, E. Giner, F.J. Fuenmayor (2009) *Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 77:126-148.
- [4] Mathew Paris, Nam-Ho Kim, Timothy Davis (2010) *Reanalysis of XFEM for Quasi-Static Crack Growth*
- [5] Mathew Paris, Nam-Ho Kim (2010) *Reanalysis of XFEM for Crack Initiation and Propagation*. University of Florida Gainesville
- [6] Chen Lei, Stephane Bordas, Hung Nguyen-Xuan, Timon Rabczuk, N. Sundararajan, S. Dal Pont, K.Y. Zeng (2009) *An ES-XFEM formulation for 2D fracture mechanics analysis*. GACM, Sept 21-23, 2009.
- [7] D. Noel (2008) *Crack simulation with Extended Finite Element Methods*. Master's Thesis, University of Glasgow.
- [8] Elie Chahine, Patrick Laborde, Yves Renard (2006) *Crack tip enrichment in the XFEM method using a cut-off function*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 00:1-15.
- [9] Nguyen Vinh Phu, *An Object-Oriented approach to the Extended Finite Element Method with Application to Fracture Mechanics*
- [10] Stephane P.A. Bordas, Sundararajan Natarajan, Pierre Kerfriden, Charles Edward Augarde, D. Roy Mahapatra, Timon Rabczuk, Stefano Dal Pont (2011) *On the performance of strain smoothing for quadratic and enriched finite element approximations (XFEM/GFEM/PUFEM)*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 86:637-666.
- [11] Stephane P.A. Bordas, Timon Rabczuk, Nguyen-Xuan Hung, Vinh Phu Nguyen, Sundararajan Natarajan, Tino Bog, Do Minh Quan, Nguyen Vinh Hiep (2009) *Strain smoothing in FEM and XFEM*. Computers and Structures.

Tác giả chịu trách nhiệm bài viết:

Nguyễn Huỳnh Anh Tuấn
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật TP.HCM
Email: tuannghuyen0429@gmail.com