# LUẬT YẾU SỐ LỚN CHO TỔNG CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN PHỤ THUỘC CỘNG TÍNH TRÊN ÂM

# WEAK LAW OF LARGE NUMBERS FOR SUMS OF NEGATIVELY SUPERADDITIVE DEPENDENT RANDOM VARIABLES

**Võ Thị Vân Anh[1], Nguyễn Lê Bảo Khuyên[2]**
[1] *Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM, Việt Nam.*
[2] *Trường Cao đẳng Y tế Kiên Giang, Việt Nam.*

*Ngày toà soạn nhận bài 5/4/2021, ngày phản biện đánh giá 20/4/2021, ngày chấp nhận đăng 03/5/2021.*

## TÓM TẮT

*Các định lý giới hạn, đặc biệt là các định lý về luật số lớn, đóng một vai trò vô cùng quan trọng trong lý thuyết xác suất và thống kê Toán học. Luật số lớn được Bernoulli thiết lập năm 1713 là nguồn gốc của lý thuyết xác suất hiện đại ngày nay mà dựa trên hệ tiên đề xác suất của Kolmogorov đưa ra vào năm 1933. Các kết quả nổi bật về luật số lớn thông thường có hai dạng là luật yếu số lớn và luật mạnh số lớn. Trong số những thành tựu trên có thể kể đến định lý Kolmogorov cho các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối cũng như các kết quả khác của Khintchine, Feller, Birkhoff, Prohorov, Petrov, Martikainen, Gut và nhiều nhà nghiên cứu khác. Xu hướng chung của các bài báo là mở rộng các kết quả cổ điển bằng cách thay thế bởi các điều kiện phụ thuộc yếu hơn, chẳng hạn như phụ thuộc martingale, phụ thuộc Markov, m-phụ thuộc, m-phụ thuộc theo khối, phụ thuộc âm, liên kết âm và phụ thuộc cộng tính trên âm. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một dạng mở rộng cho luật yếu số lớn Kolmogorov – Feller cho các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm với điều kiện các biến ngẫu nhiên này bị chặn ngẫu nhiên.*

***Từ khóa:*** *phụ thuộc cộng tính trên âm; bị chặn ngẫu nhiên; luật số lớn; biến đổi đều; hội tụ theo xác suất.*

## ABSTRACT

*The limit theorems, especially the theorems of the law of large numbers, play a very important role in the theory of probability and mathematical statistics. Law of the large number established by Bernoulli in 1713 was the origin of the modern probability theory based now on the solid axiomatic foundation proposed by Kolmogorov in 1933. There are a number of brilliant results concerning the law of large numbers in weak and strong forms. Among them one can mention, e.g., the Kolmogorov theorem for independent identically distributed random variables, the results by Khintchine, Feller, Birkhoff, Prohorov, Petrov, Martikainen, Gut and many other researchers. The general trend is to extend the classical results by analysis of dependent summands, such as martingale dependence, Markov dependence, m-dependence, blockwise m-dependence, negative quadrant dependence, negatively association, and negatively superadditive dependence. In this paper, we give a version of the Kolmogorov - Feller law of the large number for negatively superadditive dependent random variables and stochastically dominated random variables.*

***Keywords:*** *negatively superadditive dependent; stochastically dominated; law of large numbers; regularly varying; convergence in probability.*

## 1. GIỚI THIỆU

Cho $\{X, X_n, n \leq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối thỏa mãn luật yếu số lớn Kolmogorov – Feller, nghĩa là hai mệnh đề sau là tương đương

*(i)* $n\mathbb{P}(|X| > n) \to 0.$

Doi: https://doi.org/10.54644/jte.64.2021.50

*(ii)* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}X\mathbb{I}\left(|X| \le n\right) \to 0$ *theo xác suất.*

Luật yếu số lớn Kolmogorov – Feller đã được nhiều tác giả chứng minh và mở rộng (xem [1], [2], [3]). Trong luật yếu số lớn Kolmogorov – Feller, điều kiện các biến ngẫu nhiên độc lập là rất mạnh. Vì thế, nhiều nhà toán học đã không ngừng thay thế điều kiện độc lập bởi các điều kiện yếu hơn, chẳng hạn độc lập đôi một (pairwise independent) (xem [4]), phụ thuộc âm (negative quadrant dependent) (xem [5]), liên kết âm (negatively associated) được đưa ra bởi Alam và Saxena (xem [6]) và được nghiên cứu bởi Joag – Dev và Proschan (xem [7]) và Block (xem [8]). Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng điều kiện phụ thuộc cộng tính trên âm (negatively superadditive dependent) (xem [9]). Hu [9] đưa ra ví dụ chỉ ra rằng, điều kiện này rất yếu so với điều kiện liên kết âm. Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập luật yếu số lớn Kolmogorov – Feller cho các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm với điều kiện các biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên.

Định lý sau đây là kết quả chính của bài báo này.

**Định lý 1.** Giả sử $\{X_i,\, i \ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên $X$ sao cho $\mathbb{P}\left(|X| > x\right)$ thuộc $\mathcal{RV}(\rho),\ \rho > -1.$

Khi đó, với các số thực không âm $\alpha, \beta$: $0 \le \alpha < \frac{1}{2},\ \beta > 0$ và $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\left(|X| > n^{\alpha+\beta}\right) = 0$ thì

$$\max_{1\le k\le n} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i - \mathbb{E}X_i\mathbb{I}\left(|X_i| \le n^{\alpha+\beta}\right)}{i^{\alpha}} \to 0$$

theo xác suất khi $n \to \infty.$ *(1)*

## 2. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trước khi chứng minh kết quả chính, chúng tôi trình bày một số khái niệm và bổ đề phục vụ chứng minh Định lý 1.

Đầu tiên chúng tôi sử dụng khái niệm ánh xạ cộng tính trên (superadditive) được giới thiệu trong [10] và một điều kiện mở rộng cho tính phụ thuộc âm được gọi là phụ thuộc cộng tính trên âm được trình bày trong [9].

**Định nghĩa 2.** Ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là cộng tính trên (superadditive) nếu với mọi $x, y$ thuộc $\mathbb{R}^n$ thì

$$\varphi(x \vee y) + \varphi(x \wedge y) \ge \varphi(x) + \varphi(y).$$

trong đó

$$x \vee y = \left(\max\{x_1, y_1\}, \max\{x_2, y_2\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}\right)$$

$$x \wedge y = \left(\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}, \ldots, \min\{x_n, y_n\}\right)$$

với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$

**Định nghĩa 3.** Dãy hữu hạn các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ được gọi là phụ thuộc cộng tính trên âm nếu thỏa mãn

$$\mathbb{E}\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \mathbb{E}\varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n), \qquad (2)$$

trong đó $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập sao cho $X_i$ và $Y_i$ cùng phân phối với mọi $i : 1 \le i \le n$ và $\varphi$ là ánh xạ cộng tính trên sao cho các kỳ vọng trong bất đẳng thức *(2)* là tồn tại.

**Định nghĩa 4.** Dãy vô hạn các biến ngẫu nhiên $\{X_i, i \ge 1\}$ được gọi là phụ thuộc cộng tính trên âm nếu mọi tập con hữu hạn của $\{X_i, i \ge 1\}$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm.

Tiếp theo chúng tôi trình bày khái niệm hàm biến đổi đều và hàm biến đổi chậm (xem [11]).

**Định nghĩa 5.** Cho $a$ thuộc $\mathbb{R}$, hàm số $U : [a, \infty) \to (0, \infty)$ được gọi là biến đổi đều (regularly varying) bậc $\rho$, ký hiệu $U \in \mathcal{RV}(\rho)$ nếu mọi giá trị $t$ dương thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(tx)}{U(x)} = t^{\rho}.$$

Đặc biệt, nếu $\rho = 0$ thì hàm số $U$ được gọi là hàm biến đổi chậm (slowly varying), ký hiệu $U \in \mathcal{SV}.$

Định nghĩa sau đây trình bày dãy các biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên bởi một biến ngẫu nhiên.

**Định nghĩa 6.** Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$ được gọi là được gọi là bị chặn ngẫu nhiên (stochastically dominated) bởi biến ngẫu nhiên $X$ nếu tồn tại hằng số $C$ dương sao cho

$$\mathbb{P}(|X_n| > x) \leq C\mathbb{P}(|X| > x),$$

với mọi $x > 0$ và $n \geq 1$.

Hai bổ đề sau đây được sử dụng để chứng minh Định lý 1 (xem [9]).

**Bổ đề 7.** Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm và $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là các hàm đơn điệu tăng. Khi đó, $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm.

**Bổ đề 8.** Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm khả tích bậc hai có kỳ vọng 0. Khi đó, với mọi $\varepsilon$ dương thì

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{8}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_i.$$

Bổ đề tiếp theo là một tính chất cơ bản của dãy các biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên, chúng tôi lược bỏ chứng minh chi tiết. Bổ đề đã được chứng minh trong [12].

**Bổ đề 9.** Giả sử dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_i, i \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên $X$. Khi đó, với mọi $\alpha$ dương và $b$ dương, tồn tại các hằng số dương $C_1, C_2$ sao cho các mệnh đề sau là đúng

*(i)* $\mathbb{E}|X_n|^{\alpha}\,\mathbb{I}(|X_n| \leq b) \leq$

$$C_1\mathbb{E}|X|^{\alpha}\,\mathbb{I}(|X| \leq b) + b^{\alpha}\mathbb{P}(|X| > b).$$

*(ii)* $\mathbb{E}|X_n|^{\alpha}\,\mathbb{I}(|X_n| > b) \leq C_2\mathbb{E}|X|^{\alpha}\,\mathbb{I}(|X| > b).$

Bổ đề sau đây là một kết quả đơn giản.

**Bổ đề 10.** Giả sử $\alpha$ là số thực dương thỏa mãn $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. Khi đó, tồn tại hằng số $C$ dương sao cho bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2\alpha}} \leq Cn^{1-2\alpha}.$$

Bổ đề kế tiếp là một kết quả nổi tiếng của Karamata (xem [11]).

**Bổ đề 11. (Karamata)** Giả sử $f$ xác định trên $[X;\infty)$ và $f$ thuộc $\mathcal{RV}(\rho)$. Khi đó, với mọi $\alpha > -(\rho+1)$ thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1} f(x)}{\int_X^x t^{\alpha} f(t)\,dt} = \alpha + \rho + 1.$$

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra một bổ đề được sử dụng trực tiếp để chứng minh Định lý 1.

**Bổ đề 12.** Giả sử $\{X_i, i \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên $X$ thỏa mãn $\mathbb{P}(|X| > x)$ thuộc $\mathcal{RV}(\rho), \rho > -1$. Với mỗi $i : i \geq 1$ và các số thực không âm $\alpha, \beta$: $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \beta > 0$ đặt

$$\overline{X_i} = -n^{\alpha+\beta}\mathbb{I}(X_i < -n^{\alpha+\beta})$$
$$+ X_i\mathbb{I}(|X_i| \leq -n^{\alpha+\beta}) + n^{\alpha+\beta}\mathbb{I}(X_i > n^{\alpha+\beta}),$$

$$m_{i,n} = \mathbb{E}\left(X_i\mathbb{I}(|X_i| \leq n^{\alpha+\beta})\right).$$

Khi đó, nếu $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(|X| > n^{\alpha+\beta}) = 0$ thì các mệnh đề sau là đúng

*(i)* $$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{1}{n^{\beta}}\left|\sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbb{E}\overline{X_i} - m_{i,n}}{i^{\alpha}}\right| = 0.$$

*(ii)* $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\left(|X_i|\mathbb{I}(|X_i| \leq n^{\alpha+\beta})\right)}{i^{\alpha}} = 0.$$

*(iii)* $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(X_i^{2}\mathbb{I}\left(\left|X_i\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{2\alpha}}=0.$$

*(iv)* $$\lim_{n\to\infty}n^{2\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{P}\left(\left|X_i\right|>n^{\alpha+\beta}\right)}{i^{2\alpha}}=0.$$

**Chứng minh.**

*(i)* Áp dụng Bổ đề 10, ta có

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^{\beta}}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathbb{E}\overline{X}_i-m_{i,n}}{i^{\alpha}}\right|\\
&\le\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathbb{E}\left(n^{\alpha+\beta}\mathbb{I}\left(\left|X_i\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{\alpha}}\\
&=\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(n^{\alpha+\beta}\mathbb{I}\left(\left|X_i\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{\alpha}}\\
&=n^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{P}\left(\left|X_i\right|>n^{\alpha+\beta}\right)}{i^{\alpha}}\\
&\le Cn^{\alpha}\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{\alpha}}\\
&\le Cn^{2\alpha}\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2\alpha}}\\
&\le Cn\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\to 0.
\end{aligned}$$

*(ii)* Áp dụng Bổ đề 9, Bổ đề 10, Bổ đề 11, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(\left|X_i\right|\mathbb{I}\left(\left|X_i\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{\alpha}}\\
&\le\frac{C\mathbb{E}\left(\left|X\right|\mathbb{I}\left(\left|X\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)+n^{\alpha+\beta}\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)}{n^{\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{\alpha}}\\
&\le\frac{C\mathbb{E}\left(\left|X\right|\mathbb{I}\left(\left|X\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)+n^{\alpha+\beta}\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)}{n^{\beta-\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2\alpha}}\\
&\le\frac{C\mathbb{E}\left(\left|X\right|\mathbb{I}\left(\left|X\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{n^{\alpha+\beta-1}}+Cn\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\\
&\le Cn\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\to 0.
\end{aligned}$$

*(iii)* Áp dụng Bổ đề 9, Bổ đề 10, Bổ đề 11, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^{2\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(X_i^{2}\mathbb{I}\left(\left|X_i\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{2\alpha}}\\
&\le\frac{1}{n^{2\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(X_i^{2}\mathbb{I}\left(\left|X_i\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{2\alpha}}\\
&\le\frac{1}{n^{2\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{C\mathbb{E}\left(X^{2}\mathbb{I}\left(\left|X\right|\le n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{2\alpha}}\\
&\quad+n^{2\alpha}\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2\alpha}}\\
&\le Cn^{2\alpha}\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2\alpha}}\\
&\le Cn\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\to 0.
\end{aligned}$$

*(iv)* Ta có

$$\begin{aligned}
&n^{2\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{P}\left(\left|X_i\right|>n^{\alpha+\beta}\right)}{i^{2\alpha}}\\
&\le Cn^{2\alpha}\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2\alpha}}\\
&\le Cn\mathbb{P}\left(\left|X\right|>n^{\alpha+\beta}\right)\to 0.
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. W

## 3. KẾT QUẢ CHÍNH

### 3.1. Chứng minh Định lý 1

Với mỗi $k\ge 1$, đặt,

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i-m_{i,n}}{i^{\alpha}},\ \overline{S_k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\overline{X_i}-m_{i,n}}{i^{\alpha}}.$$

Khi đó, với mọi $\varepsilon>0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{1}{n^{\beta}}\max_{1\le k\le n}\left|S_k\right|>\varepsilon\right)\\
&\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\left|X_i\right|>n^{\alpha+\beta}\right)+\mathbb{P}\left(\frac{1}{n^{\beta}}\max_{1\le k\le n}\left|\overline{S_k}\right|>\varepsilon\right)\\
&:=I_1+I_2
\end{aligned}$$

với

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_i| > n^{\alpha+\beta}\right) \le Cn\mathbb{P}\left(|X| > n^{\alpha+\beta}\right) \to 0,$$

*và*

$$I_2 = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n^\beta}\max_{1\le k\le n}\left|\overline{S_k}\right| > \varepsilon\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\overline{X_i} - m_{i,n}}{i^\alpha}\right| > \varepsilon n^\beta\right)$$
$$\le \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left(\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\overline{X_i} - \mathbb{E}\overline{X_i}}{i^\alpha}\right| + \left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathbb{E}\overline{X_i} - m_{i,n}}{i^\alpha}\right|\right) > \varepsilon n^\beta\right)$$
$$\le \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\overline{X_i} - \mathbb{E}\overline{X_i}}{i^\alpha}\right| > \frac{\varepsilon n^\beta}{2}\right)$$
$$+\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathbb{E}\overline{X_i} - m_{i,n}}{i^\alpha}\right| > \frac{\varepsilon n^\beta}{2}\right)$$
$$= I_{1,1} + I_{1,2}.$$

Từ Bổ đề 12 *(i)*, ta có $I_{1,2} \to 0$. Áp dụng Bổ đề 7, Bổ đề 8, Bổ đề 13, ta có

$$I_{1,1} = \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\overline{X_i} - \mathbb{E}\overline{X_i}}{i^\alpha}\right| > \frac{\varepsilon n^\beta}{2}\right)$$
$$\le \frac{4}{\varepsilon^2 n^{2\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(\overline{X_i}\right)^2}{i^{2\alpha}}$$
$$\le Cn\mathbb{P}\left(|X| > n^{\alpha+\beta}\right)$$
$$+\frac{C}{n^{2\beta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}\left(X_i^2\mathbb{I}\left(|X_i| \le n^{\alpha+\beta}\right)\right)}{i^{2\alpha}} \to 0.$$

Định lý được chứng minh. W

### 3.2. Hệ quả và ví dụ

**Hệ quả 13.** Giả sử $\{X_i, i\ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên $X$ thỏa mãn $\mathbb{P}(|X| > x)$ thuộc $\mathcal{RV}(\rho), \rho > -1.$ Khi đó, với các số thực không âm $\alpha, \beta$: $0 \le \alpha < \frac{1}{2}, \beta > 0$ và $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}\left(|X| > n^{\alpha+\beta}\right) = 0$ thì

$$\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i}{i^\alpha} \to 0$$

theo xác suất, khi $n\to\infty$.

**Chứng minh.**

Với mọi $\varepsilon > 0,$ áp dụng Bổ đề 12 *(ii),* ta có

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i}{i^\alpha} > \varepsilon\right)$$
$$\le \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^\beta}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i - m_{i,n}}{i^\alpha}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$+\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^\beta}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{m_{i,n}}{i^\alpha}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\le \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^\beta}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i - m_{i,n}}{i^\alpha}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$+\mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_{i,n}}{i^\alpha} > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0.$$

Hệ quả được chứng minh. W

**Ví dụ 14.** Giả sử $\{X_i, i\ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính trên âm và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\rho}x^\rho \log x & \text{khi } x \ge e, \\ 0 & \text{khi } x < e, \end{cases}$$

trong đó $\rho > -1.$ Khi đó, với các số thực không âm $\alpha, \beta: 0 \le \alpha < \frac{1}{2}, \beta > 0$ sao cho $\rho(\alpha+\beta)+1 < 0$ thì ta có luật yếu số lớn,

$$\max_{1\le k\le n}\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^{k}\frac{X_i - \mathbb{E}X_i\mathbb{I}\left(|X_i| \le n^{\alpha+\beta}\right)}{i^\alpha} \to 0$$

theo xác suất, khi $n\to\infty$.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] H. Naderi, P. Matuła, M. Amini, H. Ahmadzade, A version of the Kolmogorov–Feller weak law of large numbers for maximal weighted sums of random variables, *Commun. Stat., Theory Methods* **48** (2018), no. 21, p. 5414-5418.

[2] V. V. Petrov, Limit theorems of probability theory – Sequences of independent random variables. *Clarendon Press*, (1995).

[3] D. Yuan, X. Hu. A conditional version of the extended Kolmogrov-Feller weak law of large numbers, *Statistics and Probability Letters*, (2015) 97, 99–107.

[4] B. D. Choi, S. H. Sung, On convergence of $\left(S_n - \mathbb{E}S_n\right)/n^{1/r}, 1 < r < 2$ for pairwise independent variables, *Bull. Korean Math*. Soc. **22**(1985), no.2, pp.79-82.

[5] F. Ma, J. Li, T. Hou, Some limit theorems for weighted negative quadrant dependent random variables with infinite mean, *Journal of Inequalities and Applications* (2018).

[6] K. Alam, K. M. L. Saxena, Positive dependence in multivariate distributions, *Commun. Stat., Theory Methods* **10** (1981), p. 1183-1196.

[7] K. Joag-Dev, F. Proschan, Negative association of random variables with applications, *Ann. Stat.* **11** (1983), p. 286-295.

[8] H. W. Block, T. H. Savits, M. Shaked, Some concepts of negative dependence, *Ann. Probab.* **10** (1982), p. 765-772.

[9] T. Hu, Negatively superadditive dependence of random variables with applications, *Chin. J. Appl. Probab. Stat.* **16** (2000), no. 2, p. 133-144.

[10] J. H. B. Kemperman, On the FKG - inequalities for measures on a partially ordered space, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser*. A 80 (1977), no. 4, 313–331.

[11] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, Regular variation, Encyclopedia of *Mathematics and Its Applications*, vol. 27, Cambridge University Press, 1987.

[12] F. Ma, Y. Miao, J. Mu, A note on the weak law of large numbers of Kolmogorov and Feller, *Indian Academy of Sciences* (2020).

***Tác giả chịu trách nhiệm bài viết:***
Võ Thị Vân Anh
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Email: anhvtv@hcmute.edu.vn