

MỞ RỘNG TIÊU CHUẨN ĐỐI NGẪU CHO CÁC HỆ PHI TUYẾN DAO ĐỘNG TUẦN HOÀN EXTENSION OF DUAL CRITERION TO PERIODIC VIBRATIONAL NONLINEAR SYSTEMS

Nguyễn Đông Anh, Nguyễn Minh Triết

Trường Đại học Công Nghệ, ĐHQG Hà Nội

Ngày tòa soạn nhận bài 28/5/2015, ngày phản biện đánh giá 22/6/2015, ngày chấp nhận đăng 8/7/2015

TÓM TẮT

Gần đây, một cách tiếp cận mới cho bài toán phi tuyến về dao động và điều khiển kết cấu được đề xuất bởi N. D. Anh. Cách tiếp cận này được biết với tên gọi cách tiếp cận đối ngẫu với quan điểm tạo ra một sự hài hòa trong nghiên cứu, cho phép phát hiện bản chất của vấn đề một cách đầy đủ hơn. Áp dụng cho lĩnh vực tuyến tính hóa tương đương đã dẫn đến kỹ thuật cực tiểu bình phương đối ngẫu (gọi tắt là kỹ thuật đối ngẫu). Ban đầu kỹ thuật đối ngẫu được đề xuất trong nghiên cứu dao động ngẫu nhiên của các hệ phi tuyến một bậc và nhiều bậc tự do với kích động ngoài ồn trắng. Mục đích của bài báo này là mở rộng tiêu chuẩn đối ngẫu trên để nghiên cứu hệ dao động phi tuyến tuần hoàn nhằm xác định tần số dao động riêng. Nghiên cứu đã đề nghị một công thức xác định hệ số tuyến tính hóa trung bình đối ngẫu dựa trên hai hệ số tuyến tính hóa ứng với hai giá trị biên của trọng số. Áp dụng cho hệ dao động phi tuyến Duffing bậc cao cho thấy công thức được đề nghị có sai số nhỏ hơn nhiều so với công thức kinh điển. So sánh trên cho thấy có khả năng áp dụng công thức được đề nghị để xác định tần số dao động riêng của các hệ phi tuyến phức tạp khác.

Từ khóa: tiếp cận đối ngẫu, tuyến tính hóa tương đương, trọng số, duffing bậc cao.

ABSTRACT

A new approach to nonlinear problems of vibration and structural control was recently proposed by N. D. Anh. This new approach called as dual approach has a conception of balance in research which allows finding the essence of problem in fuller details. The application to the equivalent linearization leads to the technique of dual mean square minimum (dual technique in short). At beginning the dual technique was proposed for single and multi-degree-of-freedom random nonlinear vibrations. The objective of this paper is to extend the dual criterion to periodic nonlinear vibrational systems in order to find natural frequencies. A formula of dual averaged coefficient of linearization is proposed corresponding to the boundary values of weighting coefficient. Application to Duffing systems of high nonlinearity shows that the proposed formula gives less error than the classical formula does. The comparison leads to a possibility of further use of the proposed formula to find natural frequencies of more complicated nonlinear systems.

Keywords: dual approach, equivalent linearization, weighting coefficient, high order duffing.

1. MỞ ĐẦU

Các hệ kỹ thuật thường là các hệ phi tuyến và mô hình tuyến tính là mô hình đơn giản hay được dùng nhất để mô tả gần đúng các hệ này. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp khi cần mô tả chính xác hơn người ta vẫn phải sử dụng mô hình phi tuyến và các phương pháp giải tích xấp xỉ là các công cụ thích hợp để phân tích

các bài toán phi tuyến. Ngày nay, cùng với sự phát triển của các phương pháp số, sự kết hợp với phương pháp giải tích giúp cho việc giải các bài toán phi tuyến trở nên thực tế và khả thi hơn. Một trong những phương pháp giải tích được sử dụng phổ biến là phương pháp tuyến tính hóa tương đương, do N. Krylov và

N. Bogoliubov đề xuất [1]. Ý tưởng cơ bản của phương pháp tuyến tính hóa là thay thế hệ phi tuyến ban đầu bằng một hệ tuyến tính mà các tính chất động lực học của hệ phi tuyến có thể được nghiên cứu thông qua hệ tuyến tính này, do vậy, dẫn tới khái niệm về hệ tuyến tính hóa tương đương. Phương pháp tuyến tính hóa tương đương của Krylov và Bogoliubov đã được nhiều nhà khoa học phát triển cho lĩnh vực dao động ngẫu nhiên, trong đó tiêu chuẩn tương đương dựa trên điều kiện bình phương tối thiểu do Caughey đề nghị được sử dụng phổ biến nhất [2-6]. Tiêu chuẩn này chủ yếu nhắm tới các hệ phi tuyến ngẫu nhiên, tuy vậy vẫn áp dụng được cho hệ phi tuyến có đáp ứng tuần hoàn khi thay phép lấy trung bình theo xác suất bằng phép lấy trung bình trong một chu kỳ dao động. Ý tưởng của tiêu chuẩn n là thay thế hệ dao động phi tuyến ban đầu bằng hệ dao động tuyến tính có cùng kích động, trong đó các hệ số tuyến tính hóa được xác định bằng tiêu chuẩn cực tiểu hóa trung bình bình phương của sai số phương trình. Tiêu chuẩn do Caughey đề xuất thường được coi là cơ sở để so sánh cho các phát triển lý thuyết của phương pháp tuyến tính hóa tương đương về sau. Vì lí do đó, tiêu chuẩn này còn được biết đến với các tên gọi khác như ‘tiêu chuẩn kinh điển’, ‘tiêu chuẩn thông thường’.

Như vậy, ý tưởng cơ bản của tiêu chuẩn tuyến tính hóa tương đương kinh điển cho rằng việc cực tiểu hóa sai số phương trình hay sai số giữa hàm phi tuyến và hàm tuyến tính tương đương có thể làm giảm thiểu sai số của nghiệm xấp xỉ so với nghiệm chính xác. Tuy nhiên cho đến nay, vẫn chưa có chứng minh lý thuyết về sự liên hệ sai số phương trình và sai số của nghiệm xấp xỉ. Qua quá trình áp dụng người ta nhận thấy tiêu chuẩn kinh điển cho các kết quả tốt với các sai số nhỏ khoảng vài phần trăm cho các hệ phi tuyến yếu [3]. Do vậy đã có một số tiêu chuẩn tương đương

khác như tiêu chuẩn tương đương năng lượng [4], tiêu chuẩn tuyến tính điều chỉnh [7] nhằm giảm sai số khi áp dụng cho các hệ phi tuyến trung bình và mạnh. Các kết quả cơ bản của phương pháp tuyến tính hóa tương đương được trình bày trong các sách chuyên khảo của Roberts và spanos [3], của socha [4], đặc biệt bài báo tổng quan của Crandall đã tổng kết 50 năm phát triển của phương pháp tuyến tính hóa tương đương [8].

Mới đây, một cách tiếp cận mới cho bài toán phi tuyến về dao động và điều khiển kết cấu được đề xuất bởi N. D. Anh [9]. Cách tiếp cận mới được biết với tên gọi cách tiếp cận đối ngẫu với quan điểm tạo ra một sự hài hòa trong nghiên cứu, cho phép phát hiện bản chất của vấn đề một cách đầy đủ hơn. Áp dụng cho lĩnh vực tuyến tính hóa tương đương đã dẫn đến kỹ thuật cực tiểu bình phương đối ngẫu (gọi tắt là kỹ thuật đối ngẫu). Ban đầu kỹ thuật đối ngẫu được đề xuất trong nghiên cứu dao động ngẫu nhiên của các hệ phi tuyến một bậc và nhiều bậc tự do với kích động ngoài ồn trắng [10, 11].

Mục đích của bài báo này là mở rộng tiêu chuẩn đối ngẫu trên để nghiên cứu hệ dao động phi tuyến tuần hoàn nhằm xác định tần số dao động riêng. Như đã biết đối với một hệ kỹ thuật việc xác định các tần số riêng có một tầm quan trọng để tránh cho hệ phải làm việc trong vùng cộng hưởng.

2. TIÊU CHUẨN TƯƠNG ĐƯƠNG KINH ĐIỂN

Để trình bày ý tưởng cơ bản và một số phát triển của phương pháp tuyến tính hóa tương đương, ta xét dao động phi tuyến được mô tả bởi phương trình được biểu diễn dưới dạng:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad (1)$$

trong đó x , \dot{x} và \ddot{x} lần lượt là dịch chuyển,

vận tốc và gia tốc của dao động; h là hệ số giảm chấn, $g(x, \dot{x})$ là hàm phi tuyến đối với x và \dot{x} , $f(t)$ là kích động cưỡng bức có thể là hàm tiền định hay ngẫu nhiên theo thời gian. Phương trình tuyến tính hóa tương đương của (1) có dạng:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x + b\dot{x} + kx = f(t) \quad (2)$$

trong đó b, k là các hệ số tuyến tính hóa. Sai số của phương trình sẽ là:

$$e(x, \dot{x}) = g(x, \dot{x}) - b\dot{x} - kx \quad (3)$$

Theo tiêu chuẩn tương đương kinh điển ta yêu cầu sai số phương trình giữa (1) và (2) phải thỏa mãn điều kiện cực tiểu của trung bình bình phương sai số:

$$S_{kd} = \left\langle (g(x, \dot{x}) - b\dot{x} - kx)^2 \right\rangle \rightarrow \min_{b, k} \quad (4)$$

trong đó $\langle \cdot \rangle$ là toán tử trung bình trên một chu kỳ khi nghiên cứu dao động tiền định, hoặc là toán tử trung bình theo xác suất khi nghiên cứu dao động ngẫu nhiên. Từ (4) ta có:

$$\frac{\partial S_{kd}}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial S_{kd}}{\partial k} = 0 \quad (5)$$

Với giả thiết $\langle x\dot{x} \rangle = 0$, giải hệ phương trình (5) thu được :

$$b = \frac{\langle \dot{x}g(x, \dot{x}) \rangle}{\langle \dot{x}^2 \rangle}, \quad k = \frac{\langle xg(x, \dot{x}) \rangle}{\langle x^2 \rangle} \quad (6)$$

Các hệ số tuyến tính hóa trong công thức (6) phụ thuộc vào các đáp ứng chưa biết x, \dot{x}

là nghiệm của hệ tuyến tính tương đương (2). Như vậy ta có hệ 3 phương trình (2), (6) để xác định 3 ẩn $x(t), b, k$. sau khi xác định $x(t)$ sẽ là nghiệm gần đúng của hệ phi tuyến gốc (1). Như có thể thấy từ (6) do $g(x, \dot{x})$ là hàm phi tuyến đối với x và \dot{x} nên b, k sẽ phụ thuộc phi tuyến vào các thông số của đáp ứng. Hệ quả của điều này là hệ tuyến tính tương đương (2) có thể mô tả các tính chất của hệ phi tuyến gốc (1).

3. TIÊU CHUẨN TƯƠNG ĐƯƠNG ĐỐI NGẪU CÓ TRỌNG SỐ

Như trên đã viết nhiều kết quả nghiên cứu, chẳng hạn có thể xem [3-7], đã chỉ ra rằng tiêu chuẩn kinh điển cho kết quả tốt (sai số chấp nhận được) khi áp dụng cho các hệ có mức độ phi tuyến yếu và độ chính xác giảm khi mức độ phi tuyến tăng lên. Trong bài báo này ta sẽ mở rộng tiêu chuẩn đối ngẫu, được đề nghị trong [9-11] cho hệ ngẫu nhiên phi tuyến, cho hệ phi tuyến tuần hoàn nhằm xác định tần số riêng. Ta xét phương trình dao động sau

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + g(x(t)) = 0 \quad (7)$$

Hệ tuyến tính tương đương sẽ là

$$\ddot{x}(t) + (\omega_0^2 + k_{dn})x(t) = 0 \quad (8)$$

Ta có thể xem xét tiêu chuẩn đối ngẫu có trọng số được trình bày dưới dạng như sau bao gồm hai quá trình thay thế đi và về.

$$S_{dn} = (1-p) \left\langle (g(x) - k_{dn}x)^2 \right\rangle + p \left\langle (k_{dn}x - \lambda g(x))^2 \right\rangle \rightarrow \min_{k_{dn}, \lambda} \quad (9)$$

trong đó k_{dn} hệ số tuyến tính hóa, λ là hệ số trở về, p là trọng số được chọn trong khoảng $0 \leq p \leq 1/2$. Ta thấy rằng khi $p=0$ sự thay thế lượt đi chiếm ưu thế hoàn toàn. Khi $p=1/2$ thì sự thay thế lượt đi và thay thế lượt về (đổi ngẫu) có vai trò như nhau và trường hợp này được nghiên cứu trong [10,11]. Lưu ý rằng tiêu chuẩn tương tự như (9) đã được đề nghị trong [12] cho hệ phi tuyến ngẫu nhiên và cho đến nay chưa có nghiên cứu phát triển cho hệ tuần hoàn. Để xác định các hệ số tuyến tính hóa k_{dn} và hệ số trở về λ , tiêu chuẩn đổi ngẫu yêu cầu cực tiểu hóa tổng S_{dn} , do đó $\frac{\partial S_{dn}}{\partial k_{dn}} = 0, \frac{\partial S_{dn}}{\partial \lambda} = 0$.

Từ đó ta có

$$k_{dn}(p) = \frac{(1-p) \langle g(x)x \rangle}{1-pr^2 \langle x^2 \rangle}, \quad (10)$$

trong đó ký hiệu

$$r^2 = \frac{\langle g(x)x \rangle^2}{\langle g^2(x) \rangle \langle x^2 \rangle} \quad (11)$$

Đại lượng r^2 trong công thức (11) mô tả quan hệ tương quan giữa hai hàm số dưới dạng các mô men, trong đó $\langle (\cdot) \rangle$ là toán tử trung bình trên một chu kỳ dao động. Ta thấy rằng hệ số tương đương trong (10) phụ thuộc vào giá trị của trọng số p nằm trong khoảng

$$0 \leq p \leq 1/2.$$

Việc xác định giá trị nào của p là bài toán rất khó và là mục tiêu lâu dài của các nghiên cứu về tiêu chuẩn đổi ngẫu. Hiện nay, hai giá trị giới hạn của p đang được sử dụng và quan tâm nhiều, cụ thể $p=0$ ứng với tiêu chuẩn kinh điển và $p=1/2$ đã được đề nghị và đánh giá hiệu quả cho các hệ phi tuyến ngẫu nhiên [10,11]. Tuy nhiên các áp dụng sơ bộ giá trị $p=1/2$ cho các hệ phi tuyến dao động tuần hoàn cho các kết quả không tốt, có thể là do với các hệ này cần có sự cân đối giữa các sự thay thế lượt đi và về. Do vậy, trong bài báo này để đảm bảo sự cân đối trên ta quan tâm đến hai giá trị đặc biệt trên biên. Cụ thể,

- với $p=0$ ta có hệ số tương đương kinh điển (biên bên trái)

$$k_{dn}(0) = \frac{\langle g(x)x \rangle}{\langle x^2 \rangle}. \quad (12)$$

với $p=1/2$ ta có hệ số tương đương đổi ngẫu (biên bên phải)

$$k_{dn}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2-r^2} \frac{\langle g(x)x \rangle}{\langle x^2 \rangle}. \quad (13)$$

Như vậy hệ số tương đương được đề nghị, k_{dn}^* , sẽ là giá trị trung bình cộng của hai hệ số tương đương biên trên

$$k_{dn}^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2-r^2}\right) \frac{\langle g(x)x \rangle}{\langle x^2 \rangle} = \frac{3-r^2}{4-2r^2} \frac{\langle g(x)x \rangle}{\langle x^2 \rangle} \quad (14)$$

và tần số riêng của hệ phi tuyến (7) sẽ xác định theo hệ tuyến tính hóa tương đương (8)

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 + k_{dn}^*} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3-r^2}{4-2r^2} \frac{\langle g(x)x \rangle}{\langle x^2 \rangle}}. \quad (15)$$

Trong mục tiếp theo sẽ áp dụng công thức gần đúng tần số riêng (15) thu được theo cách tiếp cận đối ngẫu cho các hệ Duffing bậc cao và so sánh với nghiệm chính xác để đánh giá sai số tương ứng.

4. ÁP DỤNG CHO HỆ PHI TUYẾN DUFFING BẬC CAO

Ta đánh giá sai số của công thức (15) qua hệ phi tuyến Duffing bậc cao

$$\ddot{x}(t) + x^{2n+1}(t) = 0 \quad (16)$$

với điều kiện đầu cho dịch chuyển và vận tốc $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$. Đây là hệ bảo toàn năng lượng do đó ta có tần số dao động chính xác được tính theo công thức sau [1]

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}, T_e = 4 \int_0^1 \frac{dx}{[2 \int_0^1 x^{2n+1} dx]^{1/2}} \quad (17)$$

Áp dụng công thức (12), (15) ta có các tần số thu được bằng tiêu chuẩn kinh điển và tiêu chuẩn trọng số như sau

$$\omega_{kd} = \sqrt{\frac{\langle x^{2n+2}(t) \rangle}{\langle x^2(t) \rangle}} = \sqrt{\frac{\langle \cos^{2n+2}(\omega_{kd}t) \rangle}{\langle \cos^2(\omega_{kd}t) \rangle}},$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{3 - r^2 \langle \cos^{2n+2}(\omega_{dn}t) \rangle}{4 - 2r^2 \langle \cos^2(\omega_{dn}t) \rangle}}, \quad (18)$$

$$r^2 = \frac{\langle \cos^{2n+2}(\omega_{dn}t) \rangle^2}{\langle \cos^{4n+2}(\omega_{dn}t) \rangle \langle \cos^2(\omega_{dn}t) \rangle}$$

So sánh các tần số tính toán với tần số chính xác được thể hiện trên Bảng 1. Ta nhận thấy tần số trung bình đối ngẫu ω^* có sai số nhỏ hơn nhiều so với sai số của tần số thu được bằng tiêu chuẩn kinh điển.

Bảng 1: So sánh các tần số tính toán với tần số chính xác

n	ω_e	ω_{kd}	ω_{tb}
1	0,847	0,866	0,846
2	0,747	0,791	0,756
3	0,675	0,740	0,697

5. KẾT LUẬN

Cách tiếp cận đối ngẫu với quan điểm tạo ra một sự hài hòa trong nghiên cứu có khả năng phát hiện bản chất của vấn đề nghiên cứu một cách đầy đủ hơn. Việc áp dụng cho lĩnh vực tuyến tính hóa tương đương đã dẫn đến kỹ thuật cực tiểu bình phương đối ngẫu (gọi tắt là kỹ thuật đối ngẫu). Ban đầu kỹ thuật đối ngẫu được đề xuất trong nghiên cứu dao động ngẫu nhiên của các hệ phi tuyến một bậc và nhiều bậc tự do với kích động ngoài ồn trắng.

Trong bài báo này đã mở rộng tiêu chuẩn đối ngẫu trên để nghiên cứu hệ dao động phi tuyến tuần hoàn nhằm xác định tần số dao động riêng. Tiêu chuẩn mở rộng phụ thuộc vào giá trị của trọng số và việc xác định giá trị nào của trọng số phù hợp nhất với bài toán phi tuyến tương ứng là vấn đề được nghiên cứu lâu dài. Dựa trên ý tưởng về sự cân đối giữa hai cách thay thế đi và về đã đề nghị một công thức xác định hệ số tuyến tính hóa trung bình đối ngẫu theo hai hệ số tuyến tính hóa ứng với hai giá trị biên của trọng số. Áp dụng cho hệ dao động phi tuyến Duffing bậc cao cho thấy công thức được đề nghị có sai số nhỏ hơn nhiều so với công thức thu được bằng kỹ thuật kinh điển. So sánh trên cho thấy có khả năng áp dụng công thức được đề nghị để xác định tần số dao động riêng của các hệ phi tuyến phức tạp khác. Tuy nhiên cũng cần tiếp tục nghiên cứu tiêu chuẩn đối ngẫu cho nhiều hệ dao động tuần hoàn khác để hiểu rõ hơn vai trò của các thay thế nhằm thu được một công thức hoàn thiện cho thực tế kỹ thuật.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Krylov N. M., Bogolyubov N. N., *Introduction to non-linear mechanics (in Russian)*. Kiev: Publisher AN SSSR (1937).
- [2] Caughey TK., *Equivalent linearization techniques*. *Journal of the Acoustical Society of America*; 35:1706–17112 (1963).
- [3] Roberts, J.B., Spanos, P.D., *Random Vibration and Statistical Linearization*. Wiley, New York (1990).
- [4] Socha, L., *Linearization methods for stochastic dynamic system*. *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin (2008).
- [5] Proppe, C., Pradlwarter, H.J., Schüller, G.I., *Equivalent linearization and Monte-Carlo simulation in stochastic dynamics*. *J. Probab. Eng. Mech.* 18(1), 1–15 (2003).
- [6] Langley R S., *An investigation of multiple solutions yielded by the equivalent linearization method*. *J. Sound Vib.* 127:271-281 (1988).
- [7] Elishakoff I., Andrimasy L., Dolley M.: *Application and extension of the stochastic linearization by Anh and Di Paola*. *Acta Mech.* 204, 89–98 (2009).
- [8] Crandall S.H., *A half-century of stochastic equivalent linearization*, *Struct. Control Health Monit.*, 13, 27–40, (2006).
- [9] Anh. N.D., *Duality in the analysis of responses to nonlinear systems*, *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST 32:263-266 (2010).
- [10] Anh N.D., Hieu N.N., Linh N.N., *A dual criterion of equivalent linearization method for nonlinear systems subjected to random excitation*, *Acta Mechanica*, 223:645-654 (2012).
- [11] Anh N.D., Zakovorotny V.L., Hieu N.N., Diep D.V., *A dual criterion of stochastic linearization method for multi-degree-of-freedom systems subjected to random excitation*, *Acta Mechanica*, 223:2667-2684 (2012).
- [12] N.D. Anh, N.N. Linh, *A weighted dual criterion for stochastic equivalent linearization method using piecewise linear functions*, *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol. 36, No. 4, pp. 307-320, (2014).