

# PHÂN TÍCH ẢNH HƯỞNG CHIỀU DÀY CỦA TẤM BỊ NÚT ĐẾN ĐỘ ỔN ĐỊNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN MỞ RỘNG (XFEM)

## EFFECT ANALYSIS OF CRACKED THICK PLATE ON THE STABILITY BY XFEM

Nguyễn Ngọc Thắng

Trường Đại học Quy Nhơn, Việt Nam

Ngày toà soạn nhận bài 8/5/2017, ngày phản biện đánh giá 31/5/2017, ngày chấp nhận đăng 15/6/2017.

### TÓM TẮT

Trong bài báo này, phân tích ảnh hưởng chiều dày của tấm bị nứt đến độ ổn định bằng phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) được trình bày. Tùy theo chiều dày của tấm mà độ ổn định sẽ thay đổi khác nhau, đặc biệt là sự xuất hiện của vết nứt làm cho tấm dễ mất ổn định hơn. Ảnh hưởng của chiều dày tấm đến độ ổn định khi chịu lực nén được thể hiện thông qua hệ số lực tới hạn. Hệ số lực tới hạn của tấm bị nứt được xác định từ chương trình tính toán sử dụng XFEM dùng mô hình phần tử tứ giác đẳng tham số được lập trình trên phần mềm Matlab. Trong đó, XFEM là phương pháp được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, phổ biến nhất là các bài toán kết cấu có vết nứt. XFEM dựa trên cơ sở FEM nhưng cải tiến hơn bằng việc thêm vào những hàm “mở rộng” không liên tục, đó là các hàm xấp xỉ trong phần tử hữu hạn để tính toán sự hiện diện của vết nứt. Kết quả tính toán thu được so sánh với các nghiên cứu trước đây để khẳng định độ chính xác của phương pháp. Điểm khác biệt của bài báo là tác giả sử dụng loại phần tử khác so với các tác giả khác đã nghiên cứu.

**Từ khóa:** tấm bị nứt; chiều dày tấm; hệ số lực tới hạn; ổn định; phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng.

### ABSTRACT

In this paper, effective analysis of cracked thick plate on the stability is studied with the extended finite element method (XFEM). Depending on its thickness, the plate may have various instability, especially when crevices occur. This effect is revealed by the critical buckling factor of plates subjected to compressing loads. The buckling load factor of cracked plates is obtained from the Matlab-based computing program using XFEM to build in quadrilateral iso-parametric element. The XFEM is widely used in many fields and common problems with cracking texture. Based on FEM but the XFEM improves by adding intermittent extension functions and approximation in the finite element to calculate the presence of crevices. The results are compared with previous studies to confirm the advantages and accuracy of the new method.

**Keywords:** cracked plate; plate thickness; critical buckling factor; stability; extended finite element method (XFEM).

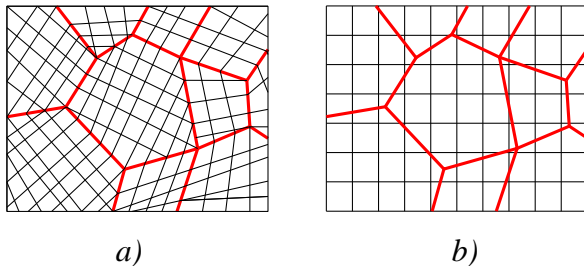
### 1. GIỚI THIỆU

Chiều dày ảnh hưởng rất lớn đến độ ổn định của tấm nói riêng và của kết cấu nói chung. Tấm dễ mất ổn định khi có độ mảnh nhỏ, điều này thể hiện qua độ dày của tấm. Trên thực tế có nhiều phương pháp để xác định lực tới hạn cho bài toán ổn định như: phương pháp giải tích, phương pháp năng

lượng, phương pháp Boobnov – Galerkin. Các phương pháp này áp dụng chủ yếu cho kết cấu chưa nứt, khi kết cấu bị nứt thì tính chất thay đổi nên cần tìm ra những phương pháp mới áp dụng cho phù hợp với bài toán. Trong đó, phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM) [1] đã giải quyết được vấn đề này. Phương pháp phần tử hữu hạn được bắt nguồn từ những yêu cầu

giải các bài toán phức tạp của lý thuyết đàn hồi, phân tích kết cấu trong xây dựng.

Tuy nhiên, FEM cũng có một số hạn chế khi ta xét bài toán có vết nứt, khi có vết nứt cần phải chia lại lưới, làm phức tạp quá trình tính toán. Vì vậy, phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (eXtend Finite Element Method – XFEM) được giới thiệu vào năm 1999 [2], đã rất thành công trong việc giải quyết các vấn đề về vết nứt, phi tuyến hình học; một số tác giả như Pedro M. Baiz và cộng sự đã phân tích bài toán ổn định có vết nứt dùng phần tử Q4 [3], hoặc Zi và các cộng sự phân tích các bài toán động lực học kết cấu dùng XFEM [4]. Phương pháp này cho phép vết nứt có thể định vị tùy ý bên trong lưới. Vì thế tác giả chọn XFEM làm công cụ phân tích bài toán có vết nứt trong bài báo này. Sự khác nhau giữa việc chia lưới theo FEM và XFEM thể hiện ở Hình 1. Điều đó cho thấy ưu điểm của XFEM trong việc mô phỏng bài toán có vết nứt.

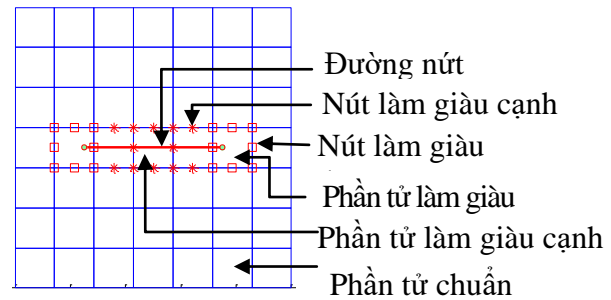


**Hình 1.** Sự khác nhau về chia lưới giữa FEM và XFEM

- a) Mô hình kết cấu chia lưới theo XFEM
- b) Mô hình kết cấu chia lưới theo FEM

Phương trình xấp xỉ chuyển vị trong XFEM được phát triển dựa trên nền tảng của phương pháp FEM bằng cách thêm vào các bậc tự do. Thành phần bậc tự do thêm vào này gọi là phần làm giàu hay mở rộng. Sử dụng XFEM có ưu điểm vết nứt độc lập với lưới so với FEM, nghĩa là không phải chia lại lưới tại vị trí vết nứt như FEM. Đối với mô phỏng vết nứt, có hai loại hàm làm giàu được sử dụng: Hàm Heaviside thường được chọn như hàm xét dấu dùng mô phỏng sự bất liên tục đối với phần tử có vết nứt cắt qua (*thân vết nứt*) và hàm làm giàu cho phần tử chứa đỉnh vết nứt, còn gọi là hàm nhánh [5] dùng

mô phỏng sự bất liên tục phần tử chứa đỉnh vết nứt. Mô hình vết nứt thể hiện ở Hình 2.



**Hình 2.** Mô hình các loại phần tử làm giàu và nứt làm giàu trong XFEM

## 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

### 2.1. Mô hình phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) [5]

Dạng chung của XFEM dùng mô phỏng vết nứt được xác định bởi:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i + \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j N_j H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in K} N_k \sum_{\alpha=1}^4 (\mathbf{b}_k^\alpha \mathbf{B}_{\alpha k}(\mathbf{x})) \quad (1)$$

Trong đó:

- +  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$  là hàm xấp xỉ của trường chuyển vị;
- +  $N_i, N_j, N_k$  tương ứng là giá trị hàm dạng tính tại nút không làm giàu, làm giàu cạnh và làm giàu đỉnh, trong bài báo tác giả chọn các hàm này giống nhau, đó là phần tử đẳng tham số tứ giác 8 nút.
- +  $\mathbf{u}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_k^\alpha$  là các bậc tự do chưa biết nút không làm giàu, làm giàu cạnh và làm giàu đỉnh;
- +  $I, J, K$ : là tổng số nút của các phần tử chuẩn, làm giàu cạnh và đỉnh vết nứt.

Hàm dấu Heaviside:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \psi(\mathbf{x}) > 0 \\ -1, & \psi(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

với  $\psi(\mathbf{x})$  là hàm level set [5] dùng để xác định loại phần tử cần làm giàu cạnh hay đỉnh.

Đối với tám Mindlin, mỗi nút có ba bậc tự do ( $w, \theta_x, \theta_y$ ).

Hàm làm giàu chứa đỉnh vết nứt  $\mathbf{B}_{ak}$  [5] được biết đến như các hàm nhánh, vật liệu đàn hồi đẳng hướng  $\mathbf{B}_{ak}$  thu được từ trường chuyển vị tiệm cận được biểu diễn như sau:

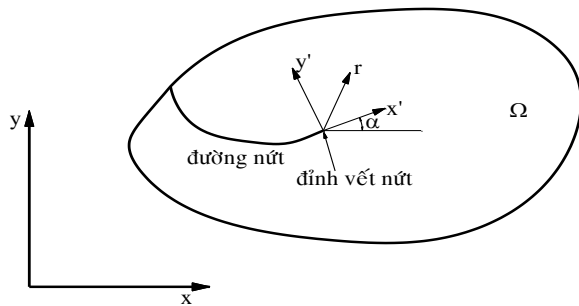
$$\mathbf{B}_{ak} = [B_1, B_2, B_3, B_4] \quad (3)$$

Với:

$$B_1(r, \theta) = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), B_2(r, \theta) = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$B_3(r, \theta) = \sqrt{r} \sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), B_4(r, \theta) = \sqrt{r} \sin\theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Với  $(r, \theta)$  tọa độ cực xác định tại đỉnh vết nứt như Hình 3



**Hình 3.** Biểu diễn trục tọa độ tại đỉnh vết nứt [5]

Xét mối quan hệ giữa tọa độ tự nhiên và tổng thể. Đối với phần tử chứa đỉnh vết nứt cần thiết phải tính toán các giá trị đạo hàm của hàm nhánh. Đạo hàm của các hàm nhánh theo tọa độ tổng thể  $(X, Y)$  nhận được:

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial X} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial X} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial Y} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (4)$$

Trong đó, tọa độ cực là các hàm của hệ trục tọa độ Đề các vuông góc địa phương  $(x, y)$ :

$$r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\text{và } \theta = \theta(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Với giá trị đạo hàm  $r, \theta$  theo tọa độ Đề các vuông góc địa phương  $(x, y)$  cho bởi:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Mối quan hệ giữa tọa độ tổng thể và tọa độ địa phương (xoay trục):

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \cos\alpha, \quad \frac{\partial x}{\partial Y} = \sin\alpha; \quad (7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = -\sin\alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = \cos\alpha$$

Với  $\alpha$  là góc nghiêng của vết nứt so trục X tổng thể (Hình 3).

Như vậy, từ tọa độ tổng thể ta tính được tọa độ địa phương thông qua ma trận chuyển sau:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Bài toán có vết nứt là bài toán có trường chuyển vị bất liên tục. Trong XFEM thêm vào các hàm xấp xỉ chuyển vị để biểu diễn sự bất liên tục đó (tăng bậc tự do – phần làm giàu), mà không làm thay đổi lưới phần tử.

Trong XFEM cho bài toán vết nứt ta quan tâm 2 hàm làm giàu quan trọng:

- Hàm làm giàu cạnh dạng Heaviside.
- Hàm làm giàu cho đỉnh vết nứt.

Tập hợp tất cả các nút được mở rộng bởi hàm bước nhảy  $H(\mathbf{x})$ , khi áp dụng trực tiếp một cách cứng nhắc thì có thể dẫn đến suy biến ma trận độ cứng. Để khắc phục hiện tượng này ta sử dụng thuộc tính của hàm Kronecker delta  $N_i(x_j) = \delta_{ij}$  được cho như sau:

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (9)$$

Theo kỹ thuật này, phương trình (1) được viết lại:

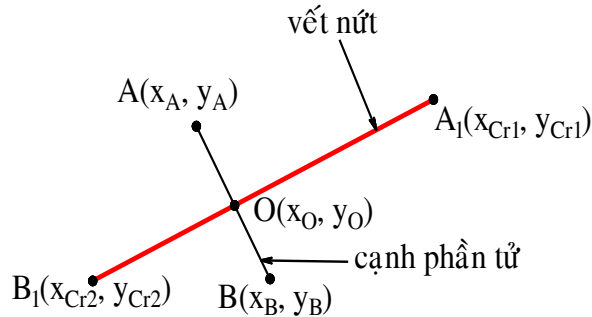
$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i + \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j N_j \left( H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j) \right)$$

$$+ \sum_{k \in K} N_k \sum_{\alpha=1}^8 \mathbf{b}_k^\alpha \left( B^\alpha(\mathbf{x}) - B^\alpha(\mathbf{x}_k) \right) \quad (10)$$

Do đó sẽ khắc phục được suy biến ma trận độ cứng khi tính toán theo XFEM.

## 2.2. Phương pháp xác định loại phần tử mở rộng

Các bước thực hiện được trình bày dưới đây và được minh họa ở Hình 4.



Hình 4. Mô hình xác định vết nứt

**Bước 1:** Từ tọa độ 2 điểm của vết nứt, xác định được phương trình đường thẳng vết nứt theo dạng:  $y = a_1 * x + b_1$

**Bước 2:** Từ tọa độ các điểm của phần tử, xác định được phương trình đường thẳng các cạnh của phần tử cũng theo dạng:  $y_2 = a_2 * x + b_2$ .

**Bước 3:** Tìm giao điểm của vết nứt với các cạnh phần tử. Lưu ý là giao điểm này phải nằm thuộc vết nứt và nằm trên đường nối dài của phần tử chứ không phải nằm trên đường nối dài của phần tử hoặc vết nứt. Giải quyết điều này bằng điều kiện tích vô hướng của 2 vector.

Nếu điểm O thuộc đường thẳng AB bất kỳ thì 2 vector  $\vec{AO}$  và  $\vec{BO}$  ngược chiều nhau. Tích vô hướng 2 vector này sẽ âm ( $< 0$ ) hay:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cdot \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) \quad (11)$$

Với:

$$\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{(x_A - x_O)(x_B - x_O) + (y_A - y_O)(y_B - y_O)}{\sqrt{(x_A - x_O)^2 + (x_B - x_O)^2} \sqrt{(y_A - y_O)^2 + (y_B - y_O)^2}} \quad (12)$$

Do đó chỉ cần xét:

$$(x_A - x_O)(x_B - x_O) + (y_A - y_O)(y_B - y_O) < 0 \quad (13)$$

$(x_O, y_O)$  là tọa độ giao điểm vết nứt và cạnh phần tử,  $(x_A, y_A)$  là tọa độ điểm thứ 1 của cạnh phần tử,  $(x_B, y_B)$  là tọa độ điểm thứ 2 của cạnh phần tử.

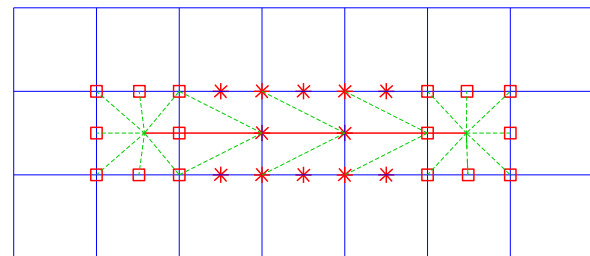
**Bước 4:** Khi có giao điểm, bắt đầu xét tiếp số lượng giao điểm:

Nếu số giao điểm là 2: đó là phần tử làm giàu cạnh, tương ứng các nút thuộc phần tử làm giàu cạnh sẽ là nút làm giàu cạnh, sẽ làm giàu bởi hàm Heaviside.

Nếu số giao điểm là 1: đó là phần tử làm giàu đỉnh vết nứt, tương ứng các nút thuộc phần tử làm giàu đỉnh sẽ là nút làm giàu đỉnh, sẽ làm giàu bởi các hàm nhánh cho phần tử chứa đỉnh vết nứt.

Sau khi đã kiểm tra giao điểm của một đoạn thẳng bất kỳ (vết nứt) với các cạnh hình chữ nhật hoặc tứ giác bất kỳ ra kết quả chính xác mới đưa thuật toán tính toán cụ thể cho từng bài toán cụ thể.

Đối với các phần tử chuẩn ta sử dụng phần tử tứ giác 8 nút với sơ đồ 9 điểm Gauss, còn đối với phần tử làm giàu sẽ được chia nhỏ theo biên các đường bất liên tục hay đỉnh vết nứt, các phần tử làm giàu cạnh chia ảo thành 4 tam giác nhỏ và phần tử làm giàu đỉnh được chia ảo làm 8 tam giác nhỏ ở trong Hình 5.



Hình 5. Mô hình chia ảo phần tử tứ giác thành các tam giác nhỏ khi có vết nứt trong tấm

## 2.3. Phương trình ổn định

Theo phương trình cân bằng năng lượng tích lũy trong tấm, phương trình xác định lực tới hạn của tấm trong phương pháp phần tử hữu hạn định nghĩa bởi:

$$(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_G) \cdot \mathbf{q}^n = \mathbf{0} \quad (14)$$

Trong đó:  $\mathbf{K}$  là ma trận độ cứng tổng thể của tấm;  $\mathbf{K}_G$  là ma trận độ cứng hình học;  $\mathbf{q}^n$  là vector chuyển vị;  $\lambda_{cr} = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n$  là lực tới hạn; n là tổng số bậc tự do của hệ.

Trong XFEM ma trận độ cứng tổng thể được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{uu} & \mathbf{K}_{ij}^{ua} & \mathbf{K}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{K}_{ij}^{au} & \mathbf{K}_{ij}^{aa} & \mathbf{K}_{ij}^{ab} \\ \mathbf{K}_{ij}^{bu} & \mathbf{K}_{ij}^{ba} & \mathbf{K}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Trong đó thành phần ma trận độ cứng  $\mathbf{K}_{ij}^{rs}$  ( $r, s = u, a, b; i, j = I, J, K$ ) bao gồm phần tử chuẩn (**uu**), mở rộng Heaviside (**aa**), mở rộng tại đỉnh vết nứt (**bb**).

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_j^s d\Omega + \int_{\Omega_e} (\mathbf{S}_i^r)^T \mathbf{D}_s \mathbf{S}_j^s d\Omega \quad (r, s = u, a, b)$$

Với thành phần ma trận biến dạng uốn  $\mathbf{B}_i^r$ ,  $\mathbf{B}_j^s$  và ma trận biến dạng cắt  $\mathbf{S}_i^r$ ,  $\mathbf{S}_j^s$ . Ma trận biến dạng đàn hồi do uốn và do cắt lần lượt  $\mathbf{D}_b$  và  $\mathbf{D}_s$ . Đối với lý thuyết Mindlin, để khắc phục được hiện tượng khoá cắt, ta sử dụng tích phân suy giảm có chọn lọc để tính các hệ số cứng liên quan đến các số hạng cắt trong ma trận độ cứng phần tử. Đó là phần tử tứ giác đẳng tham số 8 nút (sử dụng trong bài báo này) sử dụng sơ đồ 3x3 điểm Gauss để tính tích phân thứ nhất do uốn và sơ đồ 2x2 điểm Gauss để tính tích phân thứ hai do cắt trong công thức tính ma trận độ cứng phần tử.

Tương tự trong XFEM ma trận độ cứng hình học được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{K}_{Gij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Gij}^{uu} & \mathbf{K}_{Gij}^{ua} & \mathbf{K}_{Gij}^{ub} \\ \mathbf{K}_{Gij}^{au} & \mathbf{K}_{Gij}^{aa} & \mathbf{K}_{Gij}^{ab} \\ \mathbf{K}_{Gij}^{bu} & \mathbf{K}_{Gij}^{ba} & \mathbf{K}_{Gij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Trong đó thành phần ma trận độ cứng  $\mathbf{K}_{Gij}^{rs}$  ( $r, s = u, a, b; i, j = I, J, K$ ) bao gồm phần tử chuẩn (**uu**), mở rộng Heaviside (**aa**), mở rộng tại đỉnh vết nứt (**bb**).

$$\mathbf{K}_{Gij}^{rs} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{G}_{li}^r)^T \sigma_0 \mathbf{G}_{1j}^s h d\Omega + \int_{\Omega_e} (\mathbf{G}_{2i}^r)^T \sigma_0 \mathbf{G}_{2j}^s \frac{h^3}{12} d\Omega + \int_{\Omega_e} (\mathbf{G}_{3i}^r)^T \sigma_0 \mathbf{G}_{3j}^s \frac{h^3}{12} d\Omega \quad (r, s = u, a, b)$$

Để so sánh kết quả tính toán ta quy lực tới hạn về đại lượng không thứ nguyên, hay còn gọi là hệ số lực tới hạn  $k$  như sau:

$$k = \frac{12(1-\nu^2)b^2}{\pi^2 E h^3} \lambda_{cr} \quad (17)$$

Trong đó:  $b$ : chiều rộng của tấm;

$h$ : chiều dày của tấm;

$E$ : mô đun đàn hồi của vật liệu;

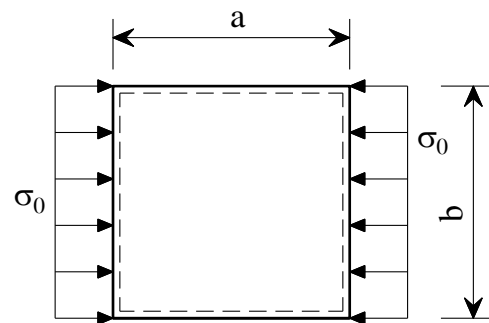
$\nu$ : hệ số Poisson;

$\lambda_{cr}$ : lực tới hạn của tấm ứng với lực tác dụng ban đầu.

### 3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

#### 3.1. Khảo sát sự hội tụ của lưới

Trước tiên tác giả khảo sát sự hội tụ của XFEM\_Q8, kết quả thu được so sánh với lời giải giải tích [6] và phương pháp của Pedro M. Baiz et al. [3] khi dùng các loại phần tử như Q4R, MITC, MISC2, MISC2\_b. Trong đó: Q4R là loại phần tử tứ giác 4 nút sử dụng tích phân rút gọn, MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Components* – MITC) phần tử nội suy khử hiện tượng khoá cắt trong tấm, MISC2 (*Mixed Interpolation and Smoothed Curvatures* – MISC) chỉ kết hợp hàm làm trơn phần tử cho ma trận độ cứng trong ma trận độ cứng tổng thể, còn MISC2\_b tương tự như MISC2 nhưng kết hợp cho cả ma trận độ cứng hình học. Tấm có  $b = 1\text{m}$ , chiều dài  $a$  và chiều dày  $h$  thay đổi theo tỉ số  $a/b$  và  $h/a$ . Vật liệu đồng nhất và đẳng hướng với hằng số vật liệu  $E = 2\text{e}11\text{N/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ . Tấm chịu tác dụng lực nén phân bố đều trong mặt phẳng.



Hình 6. Mô hình tấm chịu nén 1 phương có 4 biên tựa đơn

**Bảng 1.** So sánh sự hội tụ hệ lưới ảnh hưởng đến lực tới hạn  $k$  chịu tác dụng lực nén phân bố đều 1 phương,  $a = b = 1m$ ,  $h/a = 0.2$  với hệ số lực tới hạn tính theo giải tích  $k = 3.2637$ [6]

Số lưới	11x11	15x15	19x19	23x23
Q4R	3.31270 (1.50%)	3.2899 (0.80%)	3.2800 (0.50%)	3.2748 (0.34%)
MITC	3.29430 (0.94%)	3.2801 (0.50%)	3.2739 (0.31%)	3.2707 (0.21%)
MISC2	3.28650 (0.70%)	3.276 (0.38%)	3.2713 (0.23%)	3.2689 (0.16%)
MISC2_b	3.2922 (0.87%)	3.279 (0.47%)	3.2732 (0.29%)	3.2702 (0.20%)
XFEM_Q8	3.26089 (0.09%)	3.2622 (0.05%)	3.2628 (0.03%)	3.2631 (0.02%)

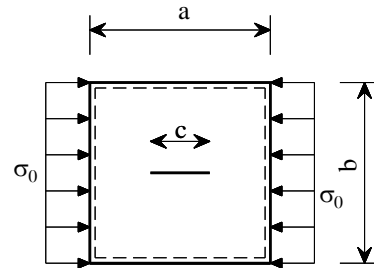
**Nhận xét:** XFEM\_Q8 sử dụng phần tử tứ giác 8 nút cho ta kết quả hội tụ với lời giải giải tích [6] nhanh so với các loại phần tử Q4R, MITC, MISC2, MISC2\_b. Chính vì ưu điểm này tác giả sử dụng phần tử Q8 trong XFEM để phân tích ổn định của tấm có vết nứt.

### 3.2. Tấm có chiều dày thay đổi với vết nứt ngang ở tâm

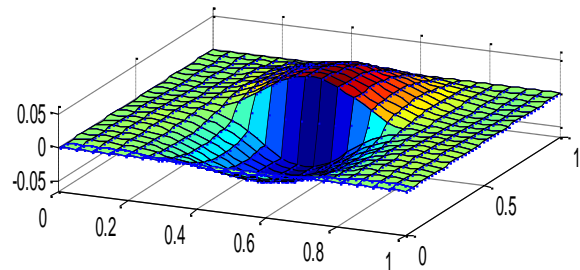
Căn cứ sự hội tụ của lưới đã đưa ra, tác giả chọn số lưới 23x23 để xét các bài toán.

Xét tấm có vết nứt xuất hiện ở tâm (Hình 7) có kích thước  $a = b = 1m$  và tỉ lệ chiều dày tấm thay đổi với tỉ lệ  $h/a = 0.01$  đến  $h/a = 0.2$ ,

chiều dài vết nứt  $c$  thay đổi từ 0.1m đến 0.5m, hằng số vật liệu  $E = 2e11N/m^2$ ,  $\nu = 0.3$ . Kết quả tính toán so sánh lời giải giải tích và các phương pháp khác.

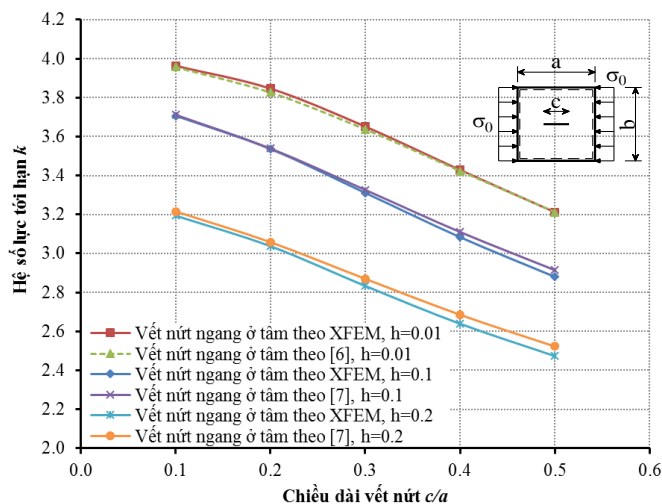


**Hình 7.** Mô hình tấm chịu nén 1 phương có 4 biên tựa đơn có vết nứt ngang ở tâm



**Hình 8.** Mode mất ổn định của tấm 4 cạnh tựa đơn chịu nén 1 phương vết nứt ngang ở tâm với  $a/b=1$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $c/a = 0.5$ .

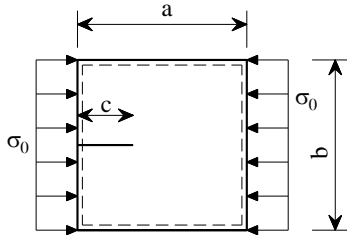
**Nhận xét:** Các kết quả tính toán khi dùng XFEM so với kết quả giải tích [7] và phương pháp số [8] hoàn toàn phù hợp, giữa các phương pháp có sai lệch nhỏ, điều đó cho thấy khi xác định bằng XFEM cho kết quả chính xác. Qua bài toán cho thấy khi chiều dày của tấm càng tăng thì hệ số lực tới hạn càng nhỏ.



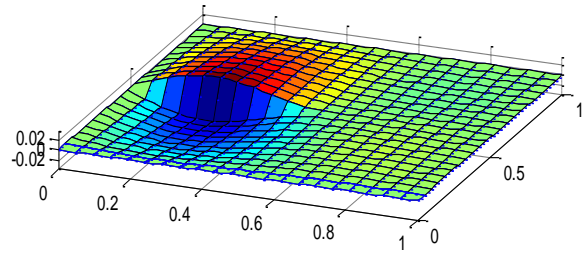
**Hình 9.** Hệ số lực tới hạn của tấm 4 cạnh tựa đơn chịu nén 1 phương có vết nứt ở tâm có chiều dày thay đổi

### 3.3. Tấm có chiều dày thay đổi với vết nứt ngang ở cạnh

Xét tấm có vết nứt xuất hiện ở cạnh (Hình 10) có kích thước  $a = b = 1\text{m}$  và tỉ lệ chiều dày tấm thay đổi với tỉ lệ  $h/a = 0.01$  đến  $h/a = 0.2$ , chiều dài vết nứt  $c$  thay đổi từ  $0.1\text{m}$  đến  $0.5\text{m}$ , hằng số vật liệu  $E = 2e11\text{N/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ . Kết quả tính toán so sánh lời giải giải tích và các phương pháp khác.

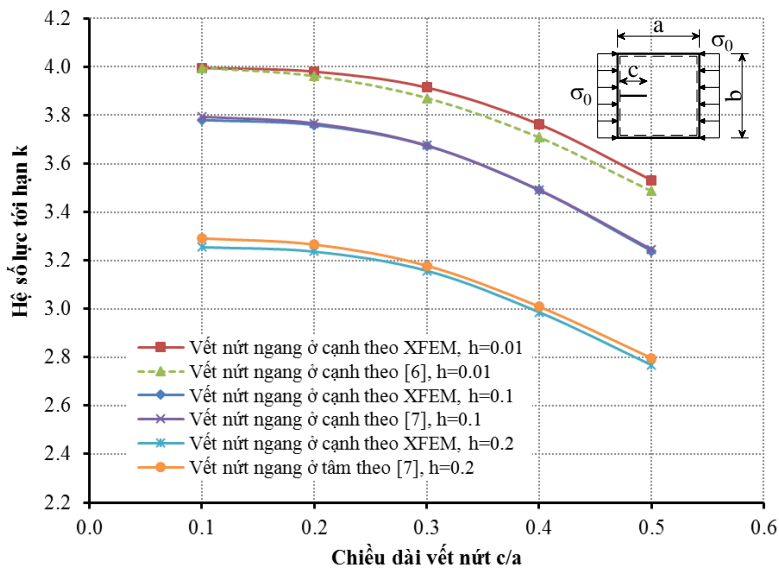


Hình 10. Mô hình tấm chịu nén 1 phương có 4 biên tựa đơn có vết nứt ngang ở cạnh



Hình 11. Mode mất ổn định của tấm 4 cạnh tựa đơn chịu nén 1 phương vết nứt ngang ở cạnh với  $a/b=1$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $c/a = 0.5$ .

**Nhận xét:** Tương tự trường hợp của vết nứt ở tâm, kết quả tính toán vết nứt ở cạnh so sánh với giải tích [7] và phương pháp số [8] hoàn toàn phù hợp, giữa các phương pháp có sai lệch nhỏ, điều đó cho thấy khi xác định bằng XFEM cho kết quả chính xác. Bài toán so sánh cho thấy khi chiều dày của tấm càng tăng thì hệ số lực tới hạn càng nhỏ.



Hình 12. Hệ số lực tới hạn của tấm 4 cạnh tựa đơn chịu nén 1 phương có vết nứt ở cạnh có chiều dày thay đổi

## 4. KẾT LUẬN

Dựa trên kết quả khảo sát thu được, tác giả có một số kết luận sau:

- (1) Dùng phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng để xác định hệ số lực tới hạn của tấm có chiều dày thay đổi bị nứt cho kết quả chính xác.
- (2) Tùy thuộc vào chiều dày của tấm mà hệ số lực tới hạn khác nhau, tấm càng dày hệ số lực tới hạn càng nhỏ.
- (3) Hệ số lực tới hạn khác nhau phụ thuộc vào chiều dài vết nứt, chiều dài vết nứt càng lớn thì hệ số lực tới hạn giảm dần đến khả năng chịu lực của tấm giảm.
- (4) Vết nứt xuất hiện ở tâm của tấm có hệ số lực tới hạn nhỏ hơn ở cạnh dẫn đến việc xuất hiện vết nứt ở tâm sẽ nguy hiểm hơn so với ở cạnh.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] J. M. Ferreira (2008). *Matlab Codes for Finite Element Analysis Solids and Structure*. Springer publisher.
- [2] Moes N, *et al.* (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for numerical methods in Engineering*, 46, pp. 131-150.
- [3] Pedro M. Baiz, *et al.* (2011). Linear buckling analysis of cracked plates by SFEM and XFEM, *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 6 (9-10) , pp. 1213-1238.
- [4] Zi, *et al.* (2005). The extended finite element method for dynamic fractures. *Shock and Vibration*, 12, pp. 9 - 23.
- [5] Soheil Mohammadi (2008). *eXtended Finite Element Method*, School of Civil Engineering University of Tehran Tehran, Iran.
- [6] Hosseini-Hashemi, *et al.*, “Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates”, *J. Sound Vibration* 315:1-2, 318–342, 2008.
- [7] B. Stahl, L. M. Keer (1972). Vibration and Stability of Cracked Rectangular Plates, *International Journal of Solids and Structures*, v8, pp. 69 - 91.
- [8] F. L. Liu (2001). Differential quadrature element method for buckling analysis of rectangular Mindlin plates having discontinuities. *International Journal of Solids and Structures*, v38, pp. 2305-2321.

**Tác giả chịu trách nhiệm bài viết:**

Nguyễn Ngọc Thắng

Đại học Quy Nhơn

Email: nnthang@ftt.edu.vn