

## ỨNG DỤNG GIẢI THUẬT ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH HÓA HỒI TIẾP CÂN BẰNG CHO HỆ XE CON LẮC NGƯỢC

### APPLICATION OF FEEDBACK LINEARIZATION CONTROL IN BALANCING CART-POLE SYSTEM

Nguyễn Văn Đông Hải,  
 Nguyễn Minh Tâm, Đỗ Đức Trí, Trần Vi Đô  
 Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TPHCM

#### TÓM TẮT

Bài báo giới thiệu một phương pháp kết hợp giữa điều khiển LQR và điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa. Từ đó, bộ điều khiển mới có những ưu điểm của cả điều khiển tuyến tính LQR (áp dụng được cho hệ Single Input-Multi Output) và điều khiển tuyến tính hóa hồi tiếp (khoảng làm việc rộng). Kết quả đáp ứng của hệ thống với bộ điều khiển mới sẽ được so sánh với bộ điều khiển LQR. Đối tượng mô phỏng được sử dụng ở đây là hệ xe con lắc ngược.

#### ABSTRACT

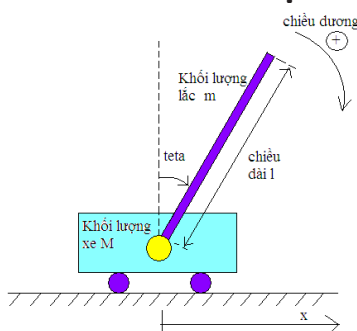
This paper presents a method associating LQR control and feedback linearization control. For this reason, new controller gets advantage of LQR control (available for Single Input-Multi Output) and feedback linearization control (wide-working range). Output responses between combined-controller and LQR control will be compared. Simulated object used is Cart-Pole System.

#### I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết điều khiển LQR và lý thuyết điều khiển tuyến tính hóa hồi tiếp đã được trình bày trong [3] và [4]. Bài báo chỉ ra một cách đặt biến để hệ SIMO trở về hệ SISO. Sau khi áp dụng luật điều khiển tuyến tính hóa hồi tiếp, tiếp tục dùng điều khiển LQR để đảm bảo hệ ổn định.

Bộ điều khiển làm hệ thống hoạt động ổn định, ngay cả khi xa điểm làm việc tĩnh. Điều này được kiểm chứng thông qua các kết quả mô phỏng hệ Cart-Pole với Matlab/Simulink.

#### II. MÔ TẢ TOÁN HỌC HỆ THỐNG



Hình 1. Mô hình Cart-Pole.

Theo [1], hệ Cart-Pole có phương trình toán học:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

Trong đó:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\alpha_3 \sin x_3 \cos x_3 - k_2 x_2 + \alpha_4 x_4^2 \sin x_3}{\alpha_1 - \alpha_2 \cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dot{x} \left[ \frac{\alpha_5}{\alpha_1 - \alpha_2 \cos^2 x_3} \cos^2 x_3 + \alpha_6 \right] \sin x_3 + \frac{\alpha_7 x_2}{\alpha_1 - \alpha_2 \cos^2 x} \end{bmatrix};$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha_8 \cos x_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \cos^2 x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \\ 0 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

Với:

$$\alpha_1 = M + m + k_3$$

$$\alpha_2 = \frac{m^2 C_1^2}{h_1}$$

$$\alpha_3 = \frac{m^2 g C_1^2}{h_1}$$

$$\alpha_4 = m C_1$$

$$\alpha_5 = \frac{m^3 C_1^2 g}{h_1^2}$$

$$\alpha_6 = \frac{m^2 C_1 g}{h_1}$$

$$\alpha_7 = \frac{m C_1 k_2}{h_1}$$

$$\alpha_8 = \frac{m C_1 k_1}{h_1}$$

$R_m$ : Điện trở động cơ (ohm)

$L_m$ : Hệ số điện kháng (H)

$K_b$ : Hằng số phản điện (V/(rad/sec))

$K_t$ : Hằng số momen (Nm/A)

$J_m$ : Momen quán tính của rotor (kgm<sup>2</sup>)

$T_f$ : Momen ma sát (Nm)

$C_m$ : Hệ số ma sát nhớt (Nm/(rad/sec))

$\tau_1$ : Momen xoắn cản (Nm)

$\omega$ : Vận tốc motor (rad/s)

$\tau_m$ : Mô men xoắn nội (Nm)

$\theta_m$ : Góc xoay trục động cơ (rad)

m: Khối lượng con lắc ngược (kg)

$J_1$ : Momen quán tính thanh con lắc (kgm<sup>2</sup>)

$C_1$ : Độ dài thanh con lắc

### III. BỘ ĐIỀU KHIỂN TUYẾN TÍNH HÓA HỒI TIẾP

Đặt 
$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = y \\ \dot{\xi}_2 = \dot{y} \\ \dot{\xi}_3 = \ddot{y} \\ \dot{\xi}_4 = \ddot{\ddot{y}} \end{cases} \rightarrow (1) \text{ trở thành}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = h(x) = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = L_f h(x) + L_g h(x).u = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = L_f^2 h(x) + L_f L_g h(x).u = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = L_f^3 h(x) + L_f^2 L_g h(x).u \end{cases} (2)$$

Chọn ngõ  $y = h(x) = \sigma_1 \times x_1 + \sigma_2 \times$

$\ln\left(\frac{1+\sin x_3}{\cos x_3}\right)$  ra theo tài liệu tham khảo [2].

Lúc này, (2) trở thành:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 + L_f^2 h(x).u \\ \dot{\xi}_4 = L_f^3 h(x) + L_f^2 L_g h(x).u \end{cases} (3)$$

Xấp xỉ:  $L_f^2 h(x).u \approx 0$

Ta được (3) trở thành

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = L_f^3 h(x) + L_f^2 L_g h(x).u \end{cases} (4)$$

Theo [3], luật điều khiển tuyến tính hóa hồi tiếp của hệ (4) là:

$$u = (L_g L_f^{(p-1)} h(x))^{-1} [v - L_f^{(p-1)} h(x)] (5)$$

Với:  $v = y^{(4)} = \xi_4$

Trong đó: 
$$v = -K\xi(t) = -K_1\xi_1 - K_2\xi_2 - K_3\xi_3 - K_4\xi_4 (6)$$

Với  $K_1; K_2; K_3; K_4$  tính được từ phương pháp tối ưu LQR.

Từ (4), ma trận trạng thái lần lượt là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

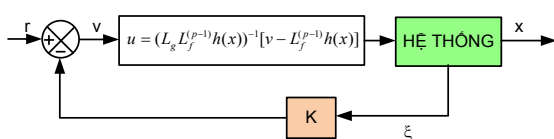
Chọn ma trận trọng lượng Q và R để xác định tương ứng. Thông số K được tính từ lệnh  $K = \text{lqr}(A,B,Q,R)$  trên công cụ Matlab. Lệnh  $\text{lqr}()$  giúp ta giải phương trình Ricatti

(vốn rất phức tạp và khó giải) để có được thông số K tương ứng.

Việc điều khiển LQR và điều khiển đặt cực là tương đương nhau: cùng tìm K sao cho  $u = -Kx$  đảm bảo ổn định cho hệ thống. Việc chọn thông số K đặt cực phải đảm bảo tuyệt đối sao cho phương trình

$K_1s^3 + K_2s^2 + K_3s + K_4 = 0$  thỏa mãn Hurwitz tức có và chỉ có toàn nghiệm âm. Do đó, việc tìm kiếm K theo LQR tức giải phương trình Ricatti cũng sẽ đảm bảo cho hệ

$K_1s^3 + K_2s^2 + K_3s + K_4 = 0$  có toàn nghiệm âm bên trái mặt phẳng phức (tương đương với ổn định Hurwitz theo phương pháp đặt cực).



Hình 2. Sơ đồ khối điều khiển tuyến tính hóa hồi tiếp.

#### IV. KẾT QUẢ MÔ PHỎNG

Chọn thông số mô hình như sau:

$$g = 9.81(m/s^2)$$

$$R_m = 2.7(\Omega)$$

$$d_1 = 40/25$$

$$R = 57.2958 \times 10^{-3}$$

$$K_b = K_t = 5.3 \times 10^{-3}$$

$$C_m = 5 \times 10^{-4}(N.m.s / rad)$$

$$L_m = 1.4 \times 10^{-3}(H)$$

$$K_f = 7.8 \times 10^{-3}(Nm)$$

$$J_m = 0.049 \times 10^{-4}(kg.m^2)$$

$$M = 1.68(kg) \quad m = 0.027(kg)$$

$$J_1 = 1.1664 \times 10^{-3}(kg.m^2)$$

$$C_1 = 0.36(m)$$

$$\alpha_1 = M + m + k_3$$

$$\alpha_2 = \frac{m^2 C_1^2}{h_1}$$

$$\alpha_3 = \frac{m^2 g C_1^2}{h_1}$$

$$\alpha_4 = m C_1$$

$$\alpha_5 = \frac{m^3 C_1^3 g}{h_1^2}$$

$$\alpha_6 = \frac{m C_1 g}{h_1}$$

$$\alpha_7 = \frac{m C_1 k_2}{h_1}$$

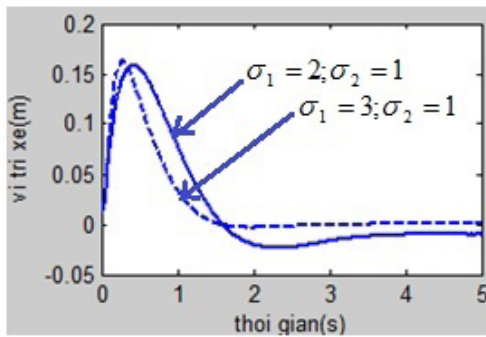
$$\alpha_8 = \frac{m C_1}{h_1}$$

Việc chọn các thành phần trong ma trận R giá trị càng lớn tương ứng với việc ta quan tâm việc đảm bảo hơn việc ổn định điện áp cấp hoạt động cho hệ thống. Điều này có thể là hệ thống chạy êm hơn nhưng có thể ảnh hưởng tương ứng với việc ổn định các biến trạng thái cân ổn định của hệ thống. Do ma trận Q được chọn khi đã đặt lại biến mới (theo [2]) nên việc chọn lựa thông số ma trận Q trở nên khó khăn hơn vì không còn cơ sở để chọn lựa. Tuy nhiên, do tính chất đảm bảo ổn định từ việc tính toán phương trình Ricatti, chưa đề cập đến chất lượng điều khiển, ta chỉ cần chọn các thành phần đường chéo của ma trận Q và R dương thì thông số K sẽ là phù hợp để hệ ổn định.

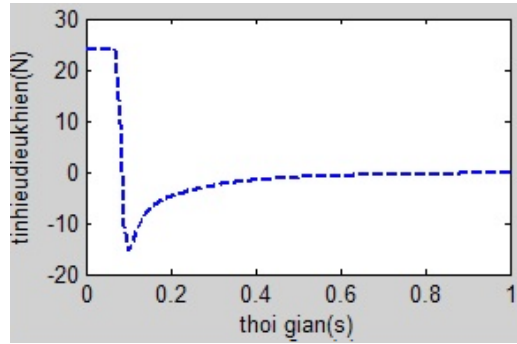
Trường hợp 1: Kiểm tra khi thay đổi các thông số  $\sigma_1$  và  $\sigma_2$

$$\text{Với } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R = 0.1$$

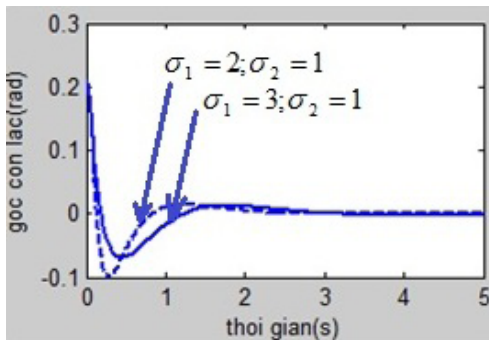
Với việc chọn trọng số tương ứng vị trí xe ưu tiên (từ  $\sigma_1 = 2$  tăng  $\sigma_2 = 3$  lên thành ), ta thấy vị trí xe xác lập nhanh hơn nhưng góc con lắc sẽ dao động nhiều hơn).



Hình 3. So sánh vị trí xe.



Hình 6. Tín hiệu điều khiển khi R=0.1.



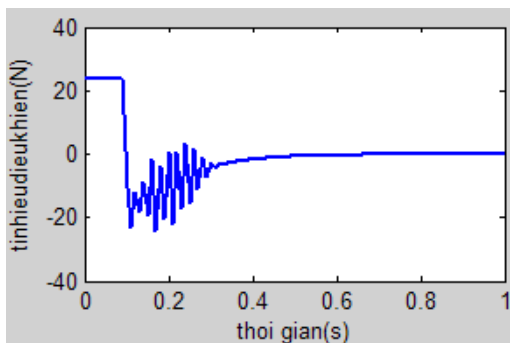
Hình 4. So sánh góc lệch con lắc.

Trường hợp 2: Kiểm tra khi thay đổi ma trận R

Với 
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_1 = 3; \sigma_2 = 1$

Với việc chọn ma trận R lớn sẽ làm hệ thống giảm đi dao động về áp cung cấp.



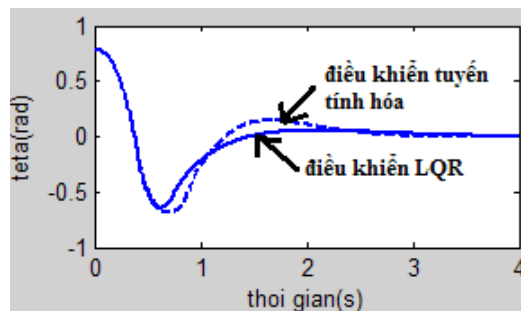
Hình 5. tín hiệu điều khiển khi R=1.

Trường hợp 3: So sánh giải thuật điều khiển LQR và tuyến tính hóa hồi tiếp. Trạng thái ban đầu của hệ thống là: Chọn thông số điều khiển cho bộ điều khiển LQR và bộ điều khiển tuyến tính hóa như sau:  
 Điều khiển tuyến tính hóa hồi tiếp với:  $\sigma_1 = 3$   
 $\sigma_2 = 1$ ;  $R = 0.1$ ;

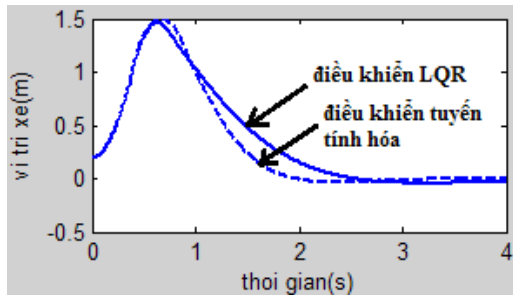
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trường hợp 3.1: Khi hệ thống còn trong phạm vi lân cận quanh điểm làm việc với trạng thái ban đầu là:

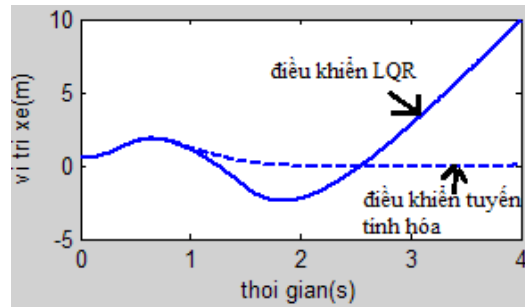
$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2(m) \\ -0.2(m/s) \\ \pi/4(rad) \\ 0.3(\dot{m}) \end{bmatrix} \quad (7)$$



Hình 7. So sánh góc lệch teta trong hai trường hợp điều khiển LQR và tuyến tính hóa

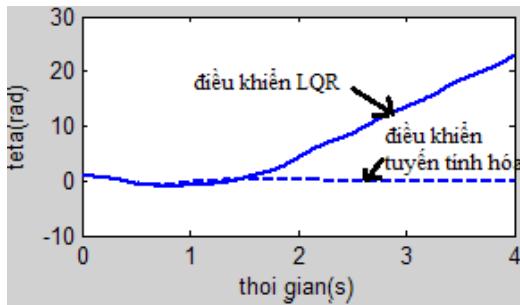


Hình 8. So sánh vị trí xe trong hai trường hợp điều khiển LQR và tuyến tính hóa.



Hình 10. So sánh vị trí xe trong hai trường hợp điều khiển LQR và tuyến tính hóa.

Trường hợp 3.2: Hệ thống có trạng thái ban đầu vượt quá so với điểm làm việc:  $x$  tăng lên thành 0.5(m) (so với (7)).



Hình 9. So sánh góc lệch teta trong hai trường hợp điều khiển LQR và tuyến tính hóa.

## V. KẾT LUẬN

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa vào đã thực hiện tốt việc cân bằng cho hệ Cart-Pole. Với việc chọn 1 biến ngõ ra mới là sự kết hợp giữa 2 biến ngõ ra ban đầu, ta đã quy hệ một vào nhiều ra thành hệ một vào một ra. Từ đó, áp dụng được các hệ điều khiển tuyến tính như LQR, đặt cực... mà giữ nguyên tính chất đáp ứng phi tuyến của bộ điều khiển. Từ đó, hệ vẫn cân bằng tốt dù lệch xa điểm làm việc tĩnh. Nếu muốn đặt ưu tiên cho ngõ ra nào, ta tăng trọng số tương ứng với biến số ngõ ra trong việc đặt biến ngõ ra mới.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Jie-Ren Hong, *Balance Control of a Car-Pole Inverted Pendulum*, Nation Cheng Kung University, Taiwan, 2003.
- [2] Cesar Aguilar, Dr. Ron Hirschorn, *Approximate Feedback Linearization and Sliding Mode Control for the Single Inverted Pendulum*, Queen's University, 2002.
- [3] Dương Hoài Nghĩa, *Hệ thống điều khiển đa biến*, Đại học Bách Khoa TP HCM (giáo trình cao học).
- [4] Nguyễn Thị Phương Hà, *Lý thuyết điều khiển hiện đại*, Đại học Bách Khoa TP HCM (giáo trình).