

**ĐIỀU KHIỂN CON LẮC NGƯỢC DI ĐỘNG
 BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KHIỂN PHI TUYẾN**
**CONTROLLING A MOBILE INVERTED
 PENDULUM BY NONLINEAR CONTROL METHOD**

Đỗ Bình Nguyên¹, Dương Hoài Nghĩa²
 Trường Đại Học Lạc Hồng¹
 Trường Đại Học Bách Khoa TP. HCM²

TÓM TẮT

Bài báo trình bày các kết quả nghiên cứu việc điều khiển con lắc ngược di động. Trước hết, hệ phương trình trạng thái của hệ được tuyến tính hóa bằng phương pháp tuyến tính hóa tại điểm làm việc và tuyến tính hóa bằng hồi tiếp. Sau đó, bộ điều khiển gián cực, thiết kế bằng phương pháp đại số, được thiết kế để điều khiển hệ thống đã được tuyến tính hóa. Kết quả mô phỏng của hai bộ điều khiển này trên Matlab – Simulink cho thấy bộ điều khiển thiết kế theo phương pháp tuyến tính hóa bằng hồi tiếp cho đáp ứng tốt hơn so với bộ điều khiển thiết kế bằng phương pháp tuyến tính hóa điểm làm việc.

ABSTRACT

This paper focuses on controlling a mobile inverted pendulum. Firstly, two methods of linearization were applied to the state equation: feedback linearization and linearization around the operating point. Then, two poles-placement controllers, designed by polynomial method, were used to control the linearized system. Finally, the results by simulating on Matlab – Simulink show that the feedback linearization controller is better than the controller which uses the method of linearization around operating point.

1. GIỚI THIỆU

Con lắc ngược là một hệ phi tuyến đa biến thường được dùng để kiểm tra các giải thuật điều khiển tự động do hoạt động của nó phụ thuộc rất nhiều vào giải thuật điều khiển. [4], [5], [6], [7], [8].

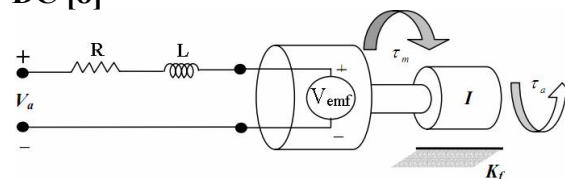
Trong bài báo này, trước hết tác giả xây dựng hệ phương trình phi tuyến mô tả hoạt động của hệ con lắc ngược di động trên cơ sở phân tích các lực tác dụng lên hệ. Sau đó, hai phương pháp tuyến tính hóa đã được áp dụng, tuyến tính hóa tại điểm làm việc và tuyến tính hóa bằng hồi tiếp, để đưa hệ phi tuyến về dạng tuyến tính đối với góc nghiêng của thân con lắc.

Với mô hình tuyến tính vừa thu được, tác giả tiến hành thiết kế bộ điều khiển gián cực bằng phương pháp đại số [3]. Kết quả mô phỏng trên Matlab – Simulink cho thấy

bộ điều khiển hoạt động được, có khả năng ứng dụng vào thực tế.

2. MÔ HÌNH TOÁN HỌC

2.1. Mô hình tuyến tính của động cơ DC [8]



Hình 1. Mô hình động cơ DC

Moment τ_m tỷ lệ với dòng điện i chạy trong phần ứng của động cơ:

$$\tau_m = k_m \cdot i \tag{2.1}$$

Điện áp V_{emf} , sinh ra khi cuộn dây động cơ quay trong từ trường, được xấp xỉ bằng hàm tuyến tính của vận tốc trục:

$$V_{emf} = k_e \omega \quad (2.2)$$

Theo định luật Kirchoff, ta có phương trình sau:

$$V_a - R \cdot I - L_R \frac{di}{dt} - V_{emf} = 0 \quad (2.3)$$

Theo định luật về chuyển động của Newton, ta có:

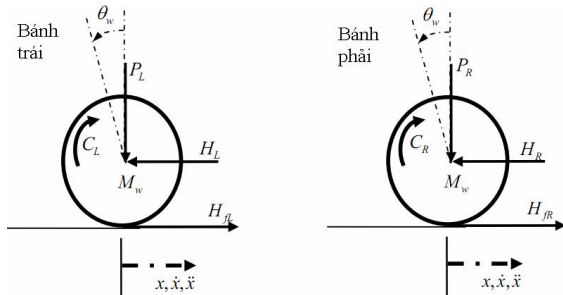
$$\sum M = \tau_m - k_f \omega - \tau_a = I_R \cdot \dot{\omega} \quad (2.4)$$

Từ các phương trình (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4), bỏ qua độ tự cảm và ma sát trên trục động cơ, ta có hàm quan hệ giữa tốc độ quay, điện áp đặt vào động cơ và moment tải

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m k_e}{I_R R} \omega + \frac{k_m V_a}{I_R R} - \frac{\tau_a}{I_R} \quad (2.5)$$

2.2. Mô hình con lắc ngược di động [8]

2.2.1. Bánh xe



Hình 2. Các lực tác dụng trên bánh xe của con lắc ngược di động

Áp dụng định luật về chuyển động của Newton, ta có các biểu thức sau:

Tổng hợp lực tác dụng trên bánh xe theo phương x:

$$M_w \ddot{x} = H_{fR} - H_R \quad (2.6)$$

Tổng hợp lực tại tâm bánh xe:

$$I_w \ddot{\theta}_w = C_R - H_{fR} r \quad (2.7)$$

Từ (2.4), (2.6) và (2.7), ta có biểu thức Newton cho bánh phải:

$$M_w \ddot{x} = \frac{k_m k_e}{R \cdot r} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{R \cdot r} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_R \quad (2.8)$$

Thực hiện tương tự cho bánh trái:

$$M_w \ddot{x} = -\frac{k_m k_e}{R \cdot r} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{R \cdot r} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_L \quad (2.9)$$

Gia tốc dài và vận tốc dài của bánh xe:

$$\ddot{x} = \ddot{\theta}_w r \Rightarrow \ddot{\theta}_w = \frac{\ddot{x}}{r} \quad (2.10)$$

$$\dot{x} = \dot{\theta}_w r \Rightarrow \dot{\theta}_w = \frac{\dot{x}}{r} \quad (2.11)$$

Từ (2.8), (2.9), (2.10) và (2.11) ta có biểu thức (2.12)

$$2 \left(M_w + \frac{I_w}{r^2} \right) \ddot{x} = -2 \frac{k_m k_e}{R r^2} \dot{x} + 2 \frac{k_m}{R r} V_a - 2 \quad (2.12)$$

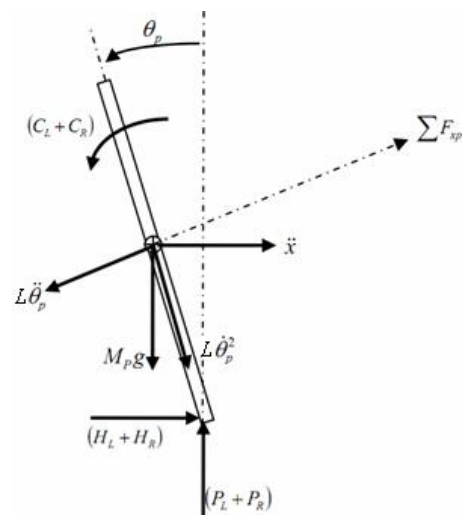
2.2.2. Thân con lắc

Áp dụng định luật về chuyển động của Newton cho các lực tác dụng theo phương ngang, ta có:

$$H_L + H_R - M_p \ddot{\theta}_p \cdot L \cdot \cos \theta_p + M_p \dot{\theta}_p^2 \cdot L \cdot \sin \theta_p = 0 \quad (2.13)$$

Các lực tác dụng vào con lắc theo phương vuông góc:

$$(H_L + H_R) \cdot \cos \theta_p + (P_L + P_R) \cdot \sin \theta_p - M_p g = 0 \quad (2.14)$$



Hình 3. Các lực tác dụng trên thân con lắc ngược di động

Tổng moment tác động tại trọng:

$$-(H_L + H_R).L \cdot \cos \theta_p - (P_L + P_R).L \cdot \sin \theta_p - (C_L + C_R) = I_p \cdot \ddot{\theta}_p \quad (2.15)$$

Đặt:

$$\begin{aligned} t_1 &= I_p + M_p \cdot L^2 \\ t_2 &= 2 \cdot M_w + \frac{2 \cdot I_w}{r^2} + M_p \\ \theta_p &= \pi + \phi \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta_p) = -\sin \phi \\ \cos(\theta_p) = -\cos \phi \\ \dot{\theta}_p = \dot{\phi} \\ \ddot{\theta}_p = \ddot{\phi} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (2.4), (2.6), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) và (2.15), với các biến trạng thái $y_1 = \phi$, $y_2 = \dot{\phi}$, $y_3 = x$, $y_4 = \dot{x}$, ta có hệ (2.16)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = f_1(y_1) + f_2(y_1, y_2) + f_3(y_1, y_4) + g_1(y_1) \cdot V_a \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = f_4(y_1) + f_5(y_1, y_2) + f_6(y_1, y_4) + g_2(y_1) \cdot V_a \end{cases} \quad (2.16)$$

Từ (2.16), ta thành lập được mô hình Matlab – Simulink của con lắc ngược di động như trong hình 4

3. THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN

Bảng 3.1 Thông số hệ thống

Thông số	Ý nghĩa	Giá trị	Đơn vị
g	Gia tốc trọng trường	9.81	m/s ²
r	Bán kính bánh xe	0.051	m
M _w	Trọng lượng bánh xe	0.03	Kg
M _p	Trọng lượng thân con lắc	1.13	Kg
I _w	Moment quán tính bánh xe	0.000039	Kg.m ²
I _p	Moment quán tính của con lắc	0.0041	Kg.m ²
L	Khoảng cách giữa tâm bánh xe và trọng tâm con	0.07	m

	lắc		
k _m	Hằng số moment	0.006123	Nm/A
k _e	Hằng số sức điện động phản kháng	0.006087	Vs/rad
R	Điện trở danh định	3	Ohm

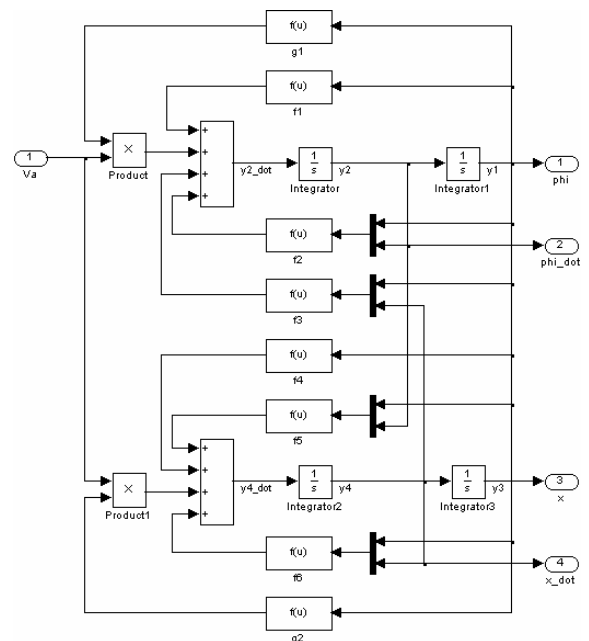
3.1. Tuyến tính hóa tại điểm làm việc [1]

Khi góc $\phi \rightarrow 0$, $\sin(\phi) = \sin(y_1) = \phi$, $\cos(\phi) = \cos(y_1) = 1$, $\dot{\phi} = y_2 = 0$, hệ phương trình (2.16) được tuyến tính hóa như sau:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = f'_1(y_1) + f'_3(y_4) + g'_1(y_1) \cdot V_a \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = f'_4(y_1) + f'_6(y_4) + g'_2(y_1) \cdot V_a \end{cases} \quad (3.1)$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{42} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \\ b_{41} \end{bmatrix} V_a \quad (3.2)$$



Hình 4. Mô hình phi tuyến của con lắc ngược di động trên Matlab - Simulink

Từ 3.2, ta tính được hàm truyền của hệ thống tuyến tính hóa:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{0.2456s}{s^3 + 0,097s^2 - 172,11} \quad (3.3)$$

Bộ điều khiển gián cực có dạng sau:

$$C(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_1s^2 + d_2s + d_3}{s^3 + c_1s^2 + c_2s + c_3} \quad (3.4)$$

Phương trình đặc trưng:

$$\Delta(s) = A(s).C(s) + B(s).D(s) \quad (3.5)$$

Sau khi thử nghiệm với các cực khác nhau, ta chọn đặt các cực của hệ thống ở các vị trí (-1; -1; -1; -10; -20; -80) do thời gian đáp ứng và khả năng chịu sai số tốt. Phương trình đặc trưng mong muốn có dạng như (3.6)

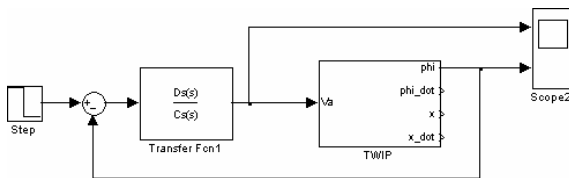
$$\Delta_d(s) = \frac{(s + 1)(s + 1)(s + 1)}{(s + 10)(s + 20)(s + 80)} \quad (3.6)$$

Cho $\Delta(s) = \Delta_d(s)$, đồng nhất hai vế, ta thu được d_1, d_2, d_3 và c_1, c_2, c_3

$$K(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{224500s^2 + 2401300s - 8096900}{s^3 + 113s^2 + 3094s - 11872} \quad (3.7)$$

Tiến hành mô phỏng điều khiển hệ thống phi tuyến bằng bộ điều khiển (3.7), như trong hình 5, với các góc khởi động khác nhau:

- $\phi_0 = 0,005$ (rad)
- $\phi_0 = 0,01$ (rad)
- $\phi_0 = 0,02$ (rad)

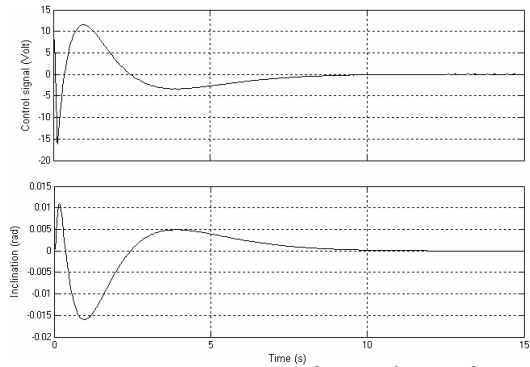


Hình 5. Bộ điều khiển gián cực cho mô hình phi tuyến

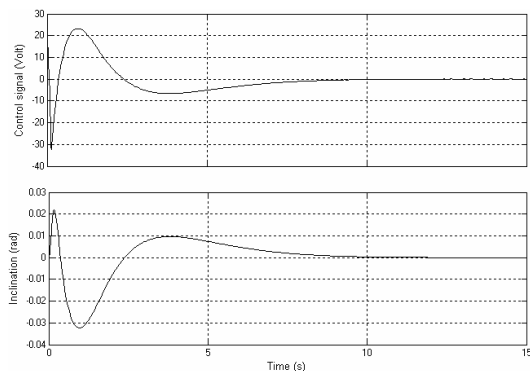
Các kết quả mô phỏng trong hình 6, 7 và 8, cho thấy bộ điều khiển chỉ có thể giữ ổn định cho hệ thống ở những góc khởi động $\phi_0 < 0,05$ (rad).

Kết quả mô phỏng thử nghiệm khả năng chịu tải của con lắc ngược với bộ điều khiển (3.7), hình 9 và 10, cho thấy hệ thống

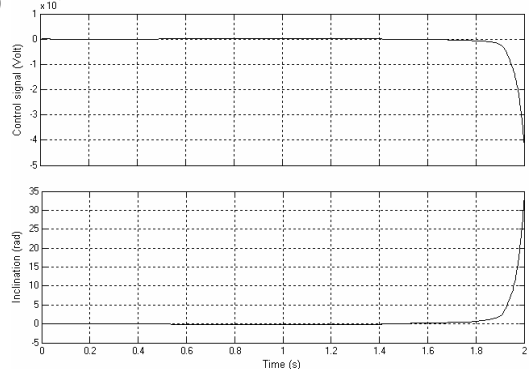
chỉ ổn định khi khối lượng thân con lắc nhỏ hơn 1,25 (kg).



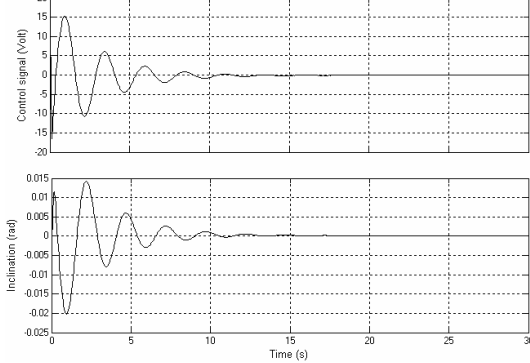
Hình 6. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa điểm làm việc. $\phi_0 = 0,005$ (rad)



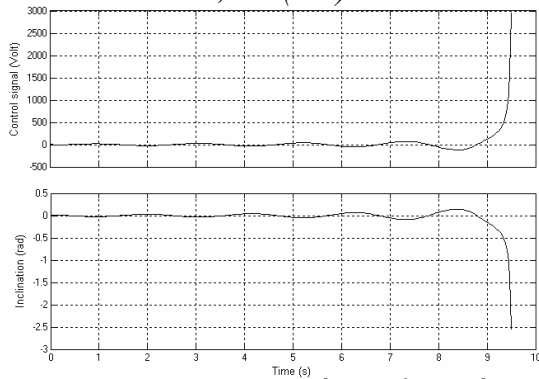
Hình 7. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa điểm làm việc. $\phi_0 = 0,01$ (rad)



Hình 8. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa điểm làm việc. $\phi_0 = 0,05$ (rad)



Hình 9. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa điểm làm việc. $M_p = 1,2$ (kg). $\phi_0 = 0,005$ (rad)



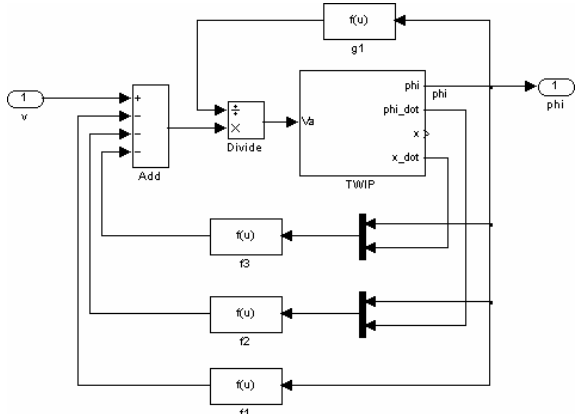
Hình 10. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa điểm làm việc. $M_p = 1,25$ (kg). $\phi_0 = 0,005$ (rad)

3.2. Tuyến tính hóa bằng hồi tiếp [1], [9]

Với mô hình hệ thống phi tuyến (2.16), đặt v là tín hiệu điều khiển mới, áp dụng luật điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa (3.8).

$$V_a = \frac{v - f(y_1) - f(y_1, y_2) - f(y_1, y_4)}{g(y_1)} \quad (3.8)$$

Mô hình Simulink của hệ thống mới, sau khi thực hiện tuyến tính hóa bằng hồi tiếp được trình bày trong hình 11.



Hình 11. Mô hình hệ thống được tuyến tính hóa bằng hồi tiếp

Hàm truyền của hệ thống sau khi tuyến tính hóa bằng hồi tiếp là [9]:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2} \quad (3.9)$$

Bộ điều khiển gián cực có dạng sau:

$$C(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_1 s + d_2}{s^2 + c_1 s + c_2} \quad (3.10)$$

Phương trình đặc trưng:

$$\Delta(s) = A(s).C(s) + B(s).D(s) \quad (3.11)$$

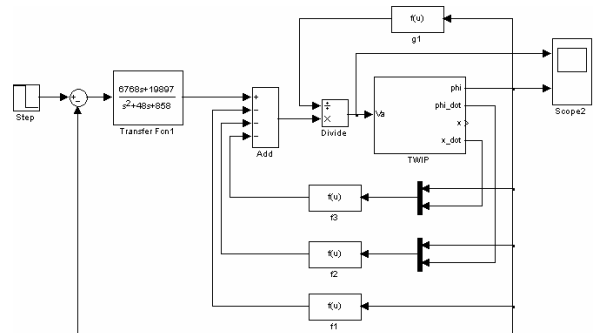
Ta sẽ đặt các cực tại các vị trí $(-20 - j, -20 + j, -14 - j, -14 + j)$. Phương trình đặc trưng mong muốn:

$$\Delta_d(s) = \frac{(s + 20 + j)(s + 20 - j)}{(s + 14 + j)(s + 14 - j)} \quad (3.12)$$

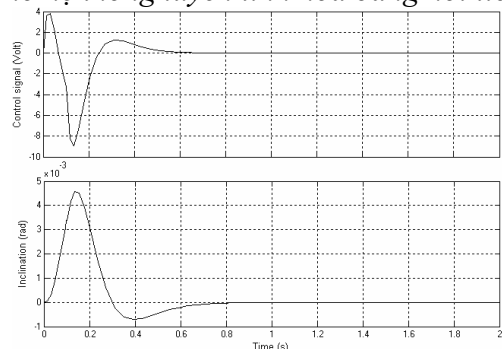
Cho $\Delta(s) = \Delta_d(s)$, đồng nhất hai vế, ta thu được d_1, d_2, d_3 và c_1, c_2, c_3 . Từ đó, ta có hàm truyền của bộ điều khiển như trong biểu thức (3.13)

$$K(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{19108s + 78997}{s^2 + 68s + 1718} \quad (3.13)$$

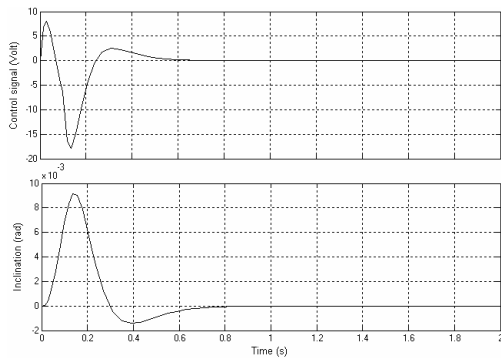
Với bộ điều khiển vừa tính toán được, ta thực hiện mô phỏng với mô hình cho trong hình 12. Kết quả mô phỏng được trình bày trong các hình 13 - 16.



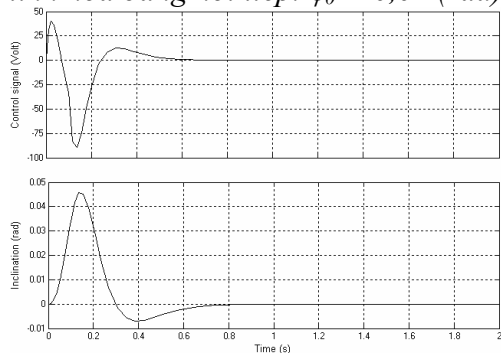
Hình 12. Mô phỏng bộ điều khiển gián cực cho hệ thống tuyến tính hóa bằng hồi tiếp



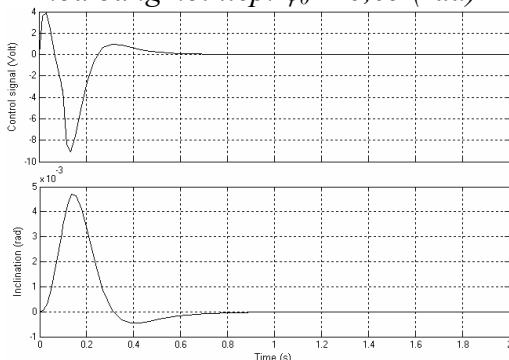
Hình 13. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa bằng hồi tiếp. $\phi_0 = 0,005$ (rad)



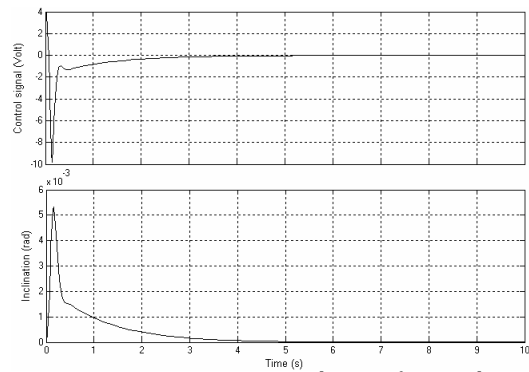
Hình 14. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa bằng hồi tiếp. $\phi_0 = 0,01$ (rad)



Hình 15. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa bằng hồi tiếp. $\phi_0 = 0,05$ (rad)



Hình 16. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa bằng hồi tiếp. $M_p = 1,2$ (kg), $\phi_0 = 0,005$ (rad)



Hình 17. Mô phỏng bộ điều khiển tuyến tính hóa bằng hồi tiếp. $M_p = 1,5$ (kg), $\phi_0 = 0,005$ (rad)

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày chi tiết các bước thiết kế và mô phỏng bộ điều khiển gián cực kết hợp với hai phương pháp tuyến tính hóa: Tuyến tính hóa tại điểm làm việc và Tuyến tính hóa bằng hồi tiếp. Qua các kết quả mô phỏng trình bày trong mục 3.2 và 3.3, ta nhận thấy:

- Bộ điều khiển thiết kế theo phương pháp tuyến tính hóa bằng hồi tiếp cho đáp ứng nhanh hơn phương pháp tuyến tính hóa điểm làm việc.
- Bộ điều khiển thiết kế theo phương pháp tuyến tính hóa điểm làm việc chỉ có thể ổn định hóa hệ thống khi góc nghiêng của con lắc nhỏ hơn 0,05 (rad). Bộ điều khiển tuyến tính hóa bằng hồi tiếp có khả năng ổn định hóa hệ thống với góc nghiêng lên đến 0,05 (rad) (hình 15).
- Bộ điều khiển tuyến tính hóa bằng hồi tiếp cho phép ổn định hóa con lắc ngược khi trọng lượng của thân con lắc thay đổi tốt hơn bộ điều khiển tuyến tính hóa điểm làm việc.

PHỤ LỤC A

$$f_1(y_1) = \frac{M_p \cdot g \cdot L \cdot \sin y_1}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2 \cos^2 y_1}{t_2}}$$

$$f_2(y_1, y_2) = -\frac{M_p^2 L^2 \cdot \sin y_1 \cdot \cos y_1}{t_1 \cdot t_2 - M_p^2 L^2 \cdot \cos^2 y_1} y_2^2$$

$$f_3(y_1, y_4) = \frac{2 \cdot k_m \cdot k_e}{R \cdot r} \frac{1 - \frac{M_p L \cdot \cos y_1}{r \cdot t_2}}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2 \cos^2 y_1}{t_2}} y_4$$

$$g_1(y_1) = \frac{2 \cdot k_m}{R} \frac{\frac{M_p L \cdot \cos y_1}{r \cdot t_2} - 1}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2 \cos^2 y_1}{t_2}}$$

$$f_4(y_1) = \frac{M_p^2 \cdot g \cdot L^2 \cdot \sin y_1 \cdot \cos y_1}{t_1 \cdot t_2 - M_p^2 L^2 \cdot \cos^2 y_1}$$

$$f_5(y_1, y_2) = -\frac{M_p \cdot L \cdot \sin y_1}{t_2 - \frac{M_p^2 L^2 \cos^2 y_1}{t_1}} y_2^2$$

$$f_6(y_1, y_4) = -\frac{2 \cdot k_m \cdot k_e}{R \cdot r} \frac{\frac{1}{r} - \frac{M_p L \cdot \cos y_1}{t_1}}{t_2 - \frac{M_p^2 L^2 \cos^2 y_1}{t_1}} y_4$$

$$g_2(y_1) = \frac{2 \cdot k_m}{R} \frac{\frac{1}{r} - \frac{M_p L \cdot \cos y_1}{t_1}}{t_2 - \frac{M_p^2 L^2 \cos^2 y_1}{t_1}}$$

$$f'_1(y_1) = \frac{M_p \cdot g \cdot L \cdot y_1}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2}{t_2}}$$

$$f'_3(y_4) = \frac{2 \cdot k_m \cdot k_e}{R \cdot r} \frac{1 - \frac{M_p L}{r \cdot t_2}}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2}{t_2}} y_4$$

$$g'_1(y_1) = \frac{2 \cdot k_m}{R} \frac{\frac{M_p L}{r \cdot t_2} - 1}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2}{t_2}}$$

$$f'_4(y_1) = \frac{M_p^2 \cdot g \cdot L^2 \cdot y_1}{t_1 \cdot t_2 - M_p^2 L^2}$$

$$f'_6(y_4) = -\frac{2 \cdot k_m \cdot k_e}{R \cdot r} \frac{\frac{1}{r} - \frac{M_p L}{t_2}}{t_2 - \frac{M_p^2 L^2}{t_1}} y_4$$

$$g'_2(y_1) = \frac{2 \cdot k_m}{R} \frac{\frac{1}{r} - \frac{M_p L}{t_2}}{t_2 - \frac{M_p^2 L^2}{t_1}}$$

$$a_{21} = \frac{M_p \cdot g \cdot L}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2}{t_2}}$$

$$a_{24} = \frac{2 \cdot k_m \cdot k_e}{R \cdot r} \frac{1 - \frac{M_p L}{r \cdot t_2}}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2}{t_2}}$$

$$a_{41} = \frac{M_p^2 \cdot g \cdot L^2}{t_1 \cdot t_2 - M_p^2 L^2}$$

$$a_{44} = -\frac{2 \cdot k_m \cdot k_e}{R \cdot r} \frac{\frac{1}{r} - \frac{M_p L}{t_2}}{t_2 - \frac{M_p^2 L^2}{t_1}}$$

$$b_{21} = \frac{2 \cdot k_m}{R} \frac{\frac{M_p L}{r \cdot t_2} - 1}{t_1 - \frac{M_p^2 L^2}{t_2}}$$

$$b_{41} = \frac{2 \cdot k_m}{R} \frac{\frac{1}{r} - \frac{M_p L}{t_2}}{t_2 - \frac{M_p^2 L^2}{t_1}}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

1. Dương Hoài Nghĩa, *Điều khiển hệ thống đa biến*, NXB Đại học quốc gia, 2007.
2. Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh, *Hệ phi tuyến*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2000.
3. Nguyễn Doãn Phước, *Lý thuyết điều khiển tuyến tính*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2002.
4. Nguyễn Phú Xuân, “Thiết kế thi công con lắc ngược trên mô hình robot hai bánh.” Luận văn thạc sỹ kỹ thuật, trường ĐH Giao thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh, 2010.

TIẾNG NƯỚC NGOÀI

5. Nguyen Gia Minh Thao – Duong Hoai Nghia – Nguyen Huu Phuc, *A PID*

Backstepping Controller for Two-Wheeled Self-Balancing Robot, IFOST, 2010.

6. Felix Grasser - Aldo D'arrigo - Silvio Colombi - Alfred Rufer, *JOE: A Mobile Inverted Pendulum*.
7. Peter Miller, *Building a Two-Wheeled Balancing Robot*, 2008.
8. Ming Tao Kang - Hoang Duy Vo - Hak Kyeong Kim - Sang Bong Kim, “Control System Design for a Mobile Inverted Pendulum via Sliding Mode Technique”. Proceedings of International Conference on Mechatronics, 2007.
9. Jean-Jacques E. Slotine – Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.