

ỨNG DỤNG KỸ THUẬT FRACTAL VÀO XỬ LÝ ẢNH FRACTAL THEORY APPLIED TO IMAGE PROCESSING

Lê Tiên Thường¹, Nguyễn Văn Phúc²

Trường Đại học Bách Khoa Tp. HCM¹

Trường Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp. HCM²

TÓM TẮT

Hình học Euclide với chiều của đối tượng là một số nguyên cho phép mô tả các vật thể nhân tạo như hình vuông, hình tròn, hình tam giác, hình chóp... Vì thế hình học Euclide không thể mô tả đầy đủ được các hình ảnh có trong tự nhiên vốn rất phức tạp như mây, núi, cây cỏ, đường bờ biển... Fractal là từ viết tắt của Fractional Dimension. Hình học Fractal với chiều của đối tượng có thể là phân số đã mở rộng hình học Euclide cổ điển cho phép phản ánh thế giới thực đầy đủ và chi tiết thông qua các hệ hàm lặp IFS (Iterated Function Systems). Bài báo này ứng dụng lý thuyết hình học Fractal để tạo ra các ảnh nền trên máy tính, trên điện thoại di động và triển khai thực hiện giải thuật tạo ảnh Fractal trên Kit ARM - Cortex 32 bits LM3S2965.

ABSTRACT

The Euclidean geometry defines the dimension of objects as a positive integer. This permits to describe the artificial objects such as a square, a circle, a triangle, a pyramid... Using this geometry, we cannot fully describe the more complex natural objects such as clouds, mountains, glasses, trees, coastlines... Fractal stands for Fractional Dimension. The Fractal geometry defines the dimension of objects as a fractal number. This geometry is an expansion of the classical Euclidean geometry. It can describe the natural objects fully and particularly. Iterative function systems are used for these descriptions. This paper uses the theory of Fractal geometry to create the background images on computers, on mobile phones and some Fractal images are deployed on the LM3S2965 32 bits ARM - Cortex Kit.

Từ khoá: Fractal Dimension, Fractal theory, Fractal Images, Mandelbrot set, Iterated Function Systems, ARM – Cortex LM3S2965.

1. Giới thiệu

Hình học cổ điển Euclide mô tả các đối tượng bằng các biểu thức toán học. Các đối tượng này có số chiều là một số nguyên: một điểm tương ứng có chiều bằng 0, một đường thẳng có chiều bằng 1, một bề mặt có chiều bằng 2, một thể tích có chiều bằng 3. Trong bài toán tìm chu vi, diện tích của một đối tượng, khi xét đến một vi phân rất nhỏ dx thì ta quy nó về đường thẳng, một vi phân $dx dy$ ta quy về một hình vuông, hình chữ nhật.

Lý thuyết hình học Fractal đề cập đến chiều của đối tượng có thể là phân số [1,2]. Lý thuyết này mô tả các đối tượng bằng các hệ hàm lặp, thích hợp để mô tả các đối tượng trong tự nhiên. Khi xét đến một vi phân dx , $dx dy$, lý thuyết hình học Fractal không quy nó về một đường thẳng, một hình vuông hay hình chữ nhật cho dù dx , dy vô cùng bé. Các đối tượng Fractal đều mang các chi tiết đặc trưng khi chúng ta phóng to đối tượng để quan sát [2].

Sự ra đời của lý thuyết hình học Fractal tạo ra 3 mảng ứng dụng lớn [3, 4]:

- Ứng dụng trong vấn đề tạo ảnh nền trên máy tính, trên điện thoại di động.
- Ứng dụng trong kỹ thuật nén ảnh.
- Ứng dụng trong nghiên cứu khoa học cơ bản.

Bài báo sử dụng lý thuyết hình học Fractal để triển khai một số hàm lặp IFS tạo nên các ảnh nền sinh động với nhiều màu sắc sử dụng cho máy tính và điện thoại di động. Các ảnh Fractal này được mô phỏng trên Matlab và triển khai trên Kit ARM LM3S2965. Trong thực tế các điện thoại di động hoạt động hoàn toàn độc lập với máy tính, việc triển khai giải thuật tạo ảnh Fractal trên Kit ARM để đảm bảo về khả năng thực thi ứng dụng trên điện thoại di động.

2. Lý thuyết hình học Fractal

2.1 Chiều trong hình học Fractal (box-dimension)

Chiều trong hình học Fractal là một diễn tả toán học. Nó dựa vào kích cỡ vật thể được tác động như thế nào khi chiều tuyến tính gia tăng [5, 6].

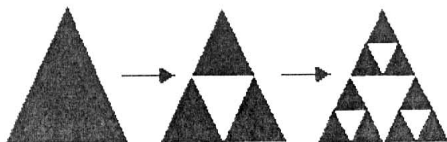
Gọi: D là chiều của vật thể

l/T là độ tuyến tính tỉ lệ.

Số lượng vật thể gia tăng là N khi được tuyến tính tỉ lệ.

$$\text{Ta có: } NT^D = l \Leftrightarrow D = \frac{\log N}{\log \frac{l}{T}} \quad (1)$$

Xét tam giác Sierpinski:



$$T = l/2$$

$$N = 3$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58$$

2.2 Phép biến đổi đồng dạng

Phép biến đổi đồng dạng dùng để tạo ra các ảnh Fractal có hình dạng giống với ảnh khởi tạo (initiator) nhưng với tỷ lệ khác nhau, đồng thời có thể xoay ảnh với một góc xoay xác định.

Phép biến đổi đồng dạng W có dạng:

$$W(z) = W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (2)$$

Với $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

Đặt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$W(z) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + T \quad (4)$$

Phép biến đổi trên đóng vai trò hết sức quan trọng trong việc mô phỏng ảnh tự nhiên vì các hệ số ma trận biến đổi chứa đựng khả năng co giãn, quay, đối xứng, dịch chuyển hình.

Các phép biến đổi cơ bản:

- Phép dịch chuyển:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad (5)$$

Vector T là vector dịch chuyển.

- Phép co giãn: Với tâm co là gốc $O(0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

- Phép quay: tâm quay là gốc $O(0,0)$, góc quay là θ .

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

2.3 Điểm bất động và ánh xạ co [5, 7]

- Định nghĩa điểm bất động:

Giả sử $f: X \rightarrow X$ là phép biến đổi trên không gian Metric. Điểm $x_f \in X$ được gọi là điểm bất động nếu:

$$f(x_f) = x_f \quad (8)$$

Điểm bất động giúp ta truy tìm ảnh Fractal, giúp chúng ta tìm thấy phần không gian bất biến dưới phép biến đổi.

- Định nghĩa ánh xạ co:

Phép biến đổi $f: X \rightarrow X$ trên không gian Metric (X, d) được gọi là ánh xạ co nếu:

$$\exists 0 \leq s < 1 \text{ sao cho } \forall x, y \in X$$

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad (9)$$

Hệ số s được gọi là hệ số co của f .

- Định lý ánh xạ co:

Giả sử $f: X \rightarrow X$ là ánh xạ co trong không gian Metric đầy đủ (X, d) . Khi đó f có duy nhất một điểm bất động $x_f \in X$, và x_f được tìm thấy bằng công thức sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{o n}(x) = x_f \quad (10)$$

Với $x \in X, n = 0, 1, 2 \dots$

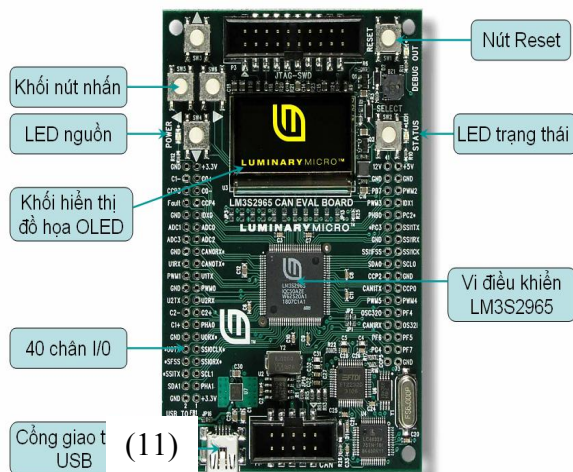
3. Triển khai giải thuật tạo ảnh Fractal trên Kit ARM LM3S2965

LM3S2965 thuộc dòng Stellaris family của Luminary Micro [8]. Cũng như các chip khác trong Stellaris family LM3S2965 được tích hợp ARM Cortex M3 core. LM3S2965 được thiết kế cho các ứng dụng trong công nghiệp như các thiết bị giám sát từ xa, các thiết bị kiểm tra đo lường, các ứng dụng về network, game, xử lý media, các ứng dụng bảo mật...

ARM cortex M3 có đặc điểm quan trọng sau:

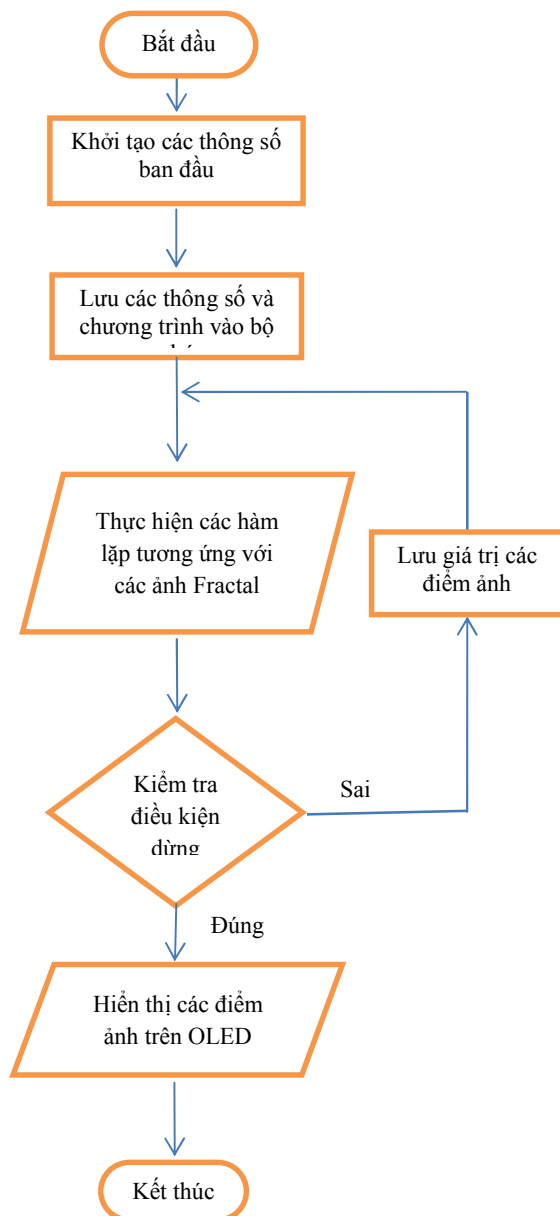
- Tiết kiệm năng lượng, hiệu suất cao.
- Có khả năng đáp ứng thời gian thực tốt.
- Thời gian trễ thấp.
- Hầu hết các lệnh được thực hiện trong một chu kỳ đơn.

Ngoài các bộ nhớ core ARM cortex M3, LM3S2965 còn được tích hợp thêm các ngoại vi như Serial Interfaces phục vụ cho các ứng dụng network, Motion Control cho các ứng dụng điều khiển, Analog cho các ứng dụng DSP, System cho reset hệ thống, hibernate.



Hình 1 - Giao diện Kit ARM LM3S2965

Lưu đồ tổng quát để triển khai các giải thuật tạo ảnh Fractal trên kit ARM:



Về cơ bản các thuật toán triển khai trên phần mềm đều có thể sử dụng để triển khai trên ARM nhờ vào các trình biên dịch hỗ trợ sẵn. Đây là điểm mạnh của ARM so với các dòng vi điều khiển khác.

4. Kết quả thực hiện

Trong bài báo này, các kết quả mô phỏng giải thuật tạo ảnh Fractal được thực hiện trên phần mềm Matlab. Việc triển khai giải thuật trên Kit ARM, tác giả sử dụng trình biên dịch đề nghị của Luminary Micro là phần mềm Red Suite phiên bản 3.4

4.1 Kết quả mô phỏng trên Matlab

4.1.1 Tập Mandelbrot

Biểu diễn toán học của tập Mandelbrot:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (11)$$

Với c là tập hợp số phức
 $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Các bước thể hiện tập Mandelbrot:

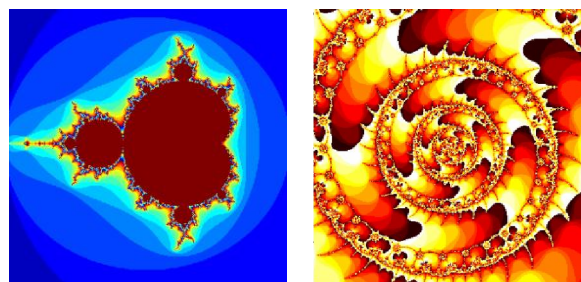
- Bước 1: Chọn giá trị khởi đầu $c = (p, q)$

- Bước 2: Kiểm tra c thuộc lớp 1 hay lớp 2. Lớp 1 gồm các giá trị c làm cho dãy z_n không tiến ra vô cùng mà được giới hạn trong vòng tròn bán kính 2. Lớp 2 gồm các giá trị phức c làm cho dãy z_n tiến ra vô cùng.

- Bước 3: nếu thuộc lớp 1 thì tô màu bằng màu xanh dương. Nếu thuộc lớp 2 thì tô màu tùy theo giá trị ngưỡng k làm cho $|z_k|$ lớn hơn 2.

- Bước 4: Quay lại bước 1 với giá trị c mới cho đến khi khảo sát hết các giá trị c cần khảo sát.

Hình 2 là kết quả mô phỏng trên Matlab của tập Mandelbrot với các giá trị p và q khác nhau.



(a) (b)

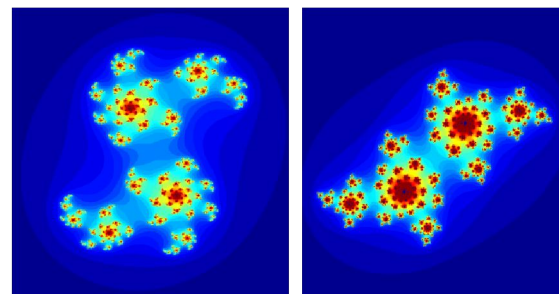
$$\begin{aligned} -0.1380 < p < -0.1180 & \quad -1.67365 < q < -1.67335 \\ -0.9975 < q < -0.9 & \quad -0.00045 < q < -0.00015 \end{aligned}$$

Hình 2 – Tập ảnh Mandelbrot

4.1.2 Một số ảnh Fractal khác đã thực hiện:

Từ phương trình (11), nếu ta thay đổi các giá trị khởi tạo của z và giữ cố định giá trị của c ta sẽ thu được tập ảnh Julia.

Hình 3 là kết quả mô phỏng tập Julia với các giá trị khởi tạo của z khác nhau.



(a) (b)

$$z = 0.42286 + 0.2749i \quad z = -0.32572 + 0.68857i$$

Hình 3 – Tập ảnh Julia

Hình 4 là ảnh của cây dương xỉ Fractal có biểu thức hàm lặp:

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \quad (12)$$

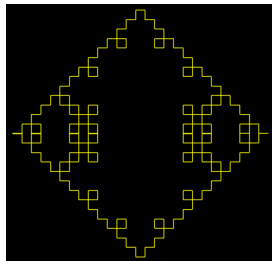
$$\text{Với } A = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$



Hình 4 - Cây dương xỉ Fractal

Hình 5 thể hiện Fractal Lindermayer với quy ước khi gặp kí tự F: vẽ đường thẳng, +/- sẽ thay đổi một góc là x.

Nếu ta chọn chuỗi khởi tạo ban đầu là F++F++F, chuỗi thay thế có quy luật là F-F+F+F-F và góc x là 1.5708 (tương ứng là 90 độ), sau 3 lần lặp ta sẽ thu được ảnh Fractal như sau:

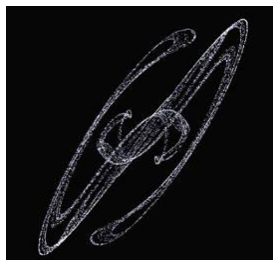


Hình 5 - Fractal Lindermayer

Hình 6 thể hiện ảnh Fractal Pickover có phương trình:

$$\begin{aligned} x &= \sin(b*y) + c*\sin(b*x) \\ y &= \sin(a*x) + d*\sin(a*y) \end{aligned} \quad (13)$$

Với a = 2.15, b = 1.75, c = 0.89, d = 1.4



Hình 6 - Fractal Pickover

Hình 7 thể hiện ảnh Fractal Quaternion có phương trình:

$$\begin{aligned} z &= a + bi + cj + dk \\ \text{Với } i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k \\ ik &= -kj = i \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} ki &= -ik = j \\ a &= 0.5, b = 0.4 \\ c &= 1, d = 0.05 \end{aligned}$$



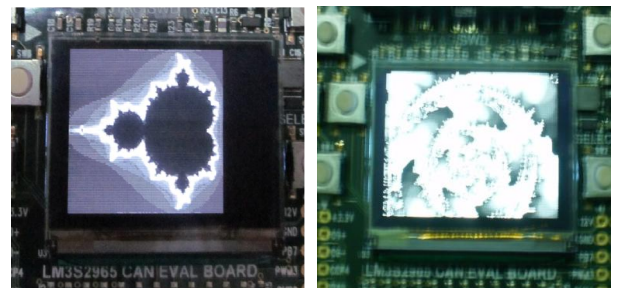
Hình 7 - Fractal Quaternion

4.2 Kết quả thực hiện trên Kit ARM

Sau khi mô phỏng trên phần mềm Matlab, trong phần này tác giả thực hiện những giải thuật tạo lại các ảnh Fractal này trên phần cứng sử dụng Kit ARM Cortex 32 bits LM3S2965.

Các ảnh Fractal tạo bởi máy tính có độ phân giải lớn hơn độ phân giải của màn hình OLED (128 x 96) [9] nhiều lần nên việc thực hiện các ảnh Fractal trên Kit ARM gặp nhiều hạn chế về chi tiết và màu sắc của đối tượng. Vì thế trong bài báo này tác giả chỉ thực hiện giải thuật tạo ảnh Fractal trên kit đối với tập Mandelbrot và cây dương xỉ Fractal. (3.6)

Hình 8 thể hiện tập ảnh Mandelbrot trên Kit ARM với các giá trị thay đổi của p và q:



(a)

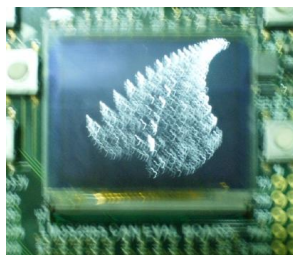
(b)

$$\begin{aligned} -0.1380 < p < -0.1180 & \quad -1.67365 < p < -1.67335 \\ -0.9975 < q < -0.9 & \quad -0.00045 < q < -0.00015 \end{aligned}$$

Hình 8 – Tập Mandelbrot trên Kit ARM

Hình 9 thể hiện ảnh cây dương xỉ Fractal trên Kit ARM với:

$$A = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$



Hình 9 - Cây dương xỉ Fractal

5. Kết luận

Bài báo đã trình bày giải thuật tạo các ảnh Fractal trên phần mềm Matlab và trên Kit ARM LM3S2965 để ứng dụng trong việc tạo ảnh nền cho máy tính và điện thoại

Việc ứng dụng lý thuyết hình học Fractal ứng dụng trong kỹ thuật nén ảnh sẽ có nhiều ứng dụng thực tế trong lĩnh vực y khoa và trong quân sự [4, 5].

Trong y khoa, khi phóng to ảnh Fractal với tỉ lệ cho phép chúng ta sẽ dễ dàng quan sát các chi tiết bất thường của ảnh chụp từ các thiết bị y tế mà mắt thường khó quan sát được. Điều này hỗ trợ đắc lực cho các bác sĩ trong việc chuẩn đoán bệnh.

đi động. Tác giả đã triển khai thành công giải thuật trên phần cứng làm việc hoàn toàn độc lập với máy tính. Điều này đã khẳng định được rằng việc tạo ảnh Fractal không chỉ được thực hiện trên các máy tính mà còn thực hiện được trên dòng vi điều khiển để tạo nên sự thân thiện giữa người sử dụng và thiết bị. Tuy nhiên, việc hiển thị ảnh trên Kit còn gặp hạn chế về màu sắc (16 mức xám) và độ phân giải (128 x 96) nên ảnh thực hiện trên phần cứng chưa được sinh động. Chúng ta có thể sử dụng các Kit có hỗ trợ màn hình màu và độ phân giải cao sẽ dễ dàng khắc phục hạn chế này.

Trong quân sự, để tiết kiệm chi phí chúng ta có thể sử dụng các camera có độ phân giải thấp phục vụ cho việc giám sát, bảo vệ. Các hình ảnh thu được từ camera này nếu như được chuyển sang ảnh Fractal và được phóng to nội dung cần quan sát chi tiết thì vẫn có độ nét cao, cung cấp được thông tin cho người sử dụng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons Ltd, England, 1990
- [2] Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, INC, 1988
- [3] Fang Qi, Pu Wan, Xue Rui, *Applications of Fractals*, Math Modeling Final Project, 1999
- [4] Yuval Fisher, *Fractal Image Compression – Theory and Application*, Springer – Verlag New York, Inc, 1995.
- [5] *An Introduction to Fractal Image Compression*, Texas Instruments Europe, October, 1997
- [6] Jiang – Dong Cai, Qing You, *Fractal Theory and its Application in Studying the Feature of Landforms*, International Workshop on Chaos-Fractal Theory and its Applications, 2010.
- [7] Shilian Xu, Jiaru Yang, yanqin Wang, Haihong Liu, Junming Gao, *Application of Fractal Art for the Package Decoration Design*, IEEE Computer Society, 2009.
- [8] Datasheet, *LM3S2965 Microcontroller*, Luminary Micro Inc , 2007
- [9] Datasheet, *OLED*, RitDisplay Corporation 14/08/2006