

PHÂN TÍCH MODE BÀI TOÁN 2D BẰNG PHƯƠNG PHÁP ELEMENT FREE GALERKIN EFG

Lê Đình Tuấn

Nguyễn Hoài Sơn

Phùng Văn phúc

Trường ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật Tp Hồ Chí Minh

ABSTRACT

This paper presents a meshless approach to analyzing two-dimensional elasticity problems by the Element-Free Galerkin (EFG) method. It is based on moving least squares approximant. The unknown function of displacement is approximated by moving least square approximants. These approximants are constructed by using a weight function, a monomial basis function and a set of non-constant coefficients. A subdivision similar to finite element method is used to provide a background mesh for numerical integration. The essential boundary conditions are enforced by Lagrange multipliers. The results are obtained for a two-dimensional problem using different EFG weight functions and compared with the results of finite element method.

1. Giới thiệu

Phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM) được xem là 1 phương pháp số mạnh và hữu dụng trong việc giải quyết thành công nhiều bài toán cơ học. Tuy nhiên, trong một số trường hợp như các bài toán về biên dạng lớn, các bài toán vết nứt: quá trình biến dạng lưới phần tử sẽ bị méo đặc biệt với những bài toán có miền hình học phức tạp, chính điều này tạo nên sự bất liên tục trong quá trình truyền năng lượng qua biên các phần tử. Do đó, việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn đã gặp phải khó khăn vì phải làm lại lưới sau mỗi bước tính toán để đảm bảo sự chính xác và hội tụ của phương pháp, và như vậy sẽ dẫn đến chi phí tính toán cao. Để khắc phục điều này, nhiều phương pháp không lưới được đề nghị: phương pháp Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), Element-Free Galerkin (EFG), phương pháp Meshless Local Petrov-Galerking (MLPG).

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp EFG với phép xấp xỉ bình phương tối thiểu động (MLS) để nghiên cứu dao động tự do cho thanh và dầm.

2. Hàm xấp xỉ MLS

Xấp xỉ MLS được Lancaster and Salkauskas xây dựng để xấp xỉ các đường và mặt bất kỳ.

Xét miền Ω chứa các điểm nút x_i ($1 \leq i \leq n$). Trên miền này, tập các hàm liên tục u có giá trị tại nút là U_i . Xấp xỉ MLS của u trên Ω là $u^h(x)$:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = p^T(x) a(x) \quad (1)$$

Trong đó: $p^T(x) = [p_1(x) \quad p_2(x) \quad \dots \quad p_m(x)]$ (2)

Với $p(x)$ $a(x)$ lần lượt là các hàm cơ sở độc lập tuyến tính và các hệ số xấp xỉ cần xác định.

$$a^T(x) = [a_0(x) \quad a_1(x) \quad \dots \quad a_m(x)]$$

Các tham số $a(x)$ được xác định bằng cách bình phương tối thiểu có trọng số theo chuẩn sai số

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x-x_i) [u^h(x_i) - U_i]^2 = \sum_{i=1}^n w_i(x-x_i) [p^T(x_i) a(x) - U_i]^2 \quad (3)$$

Với $w_i(x-x_i)$ là hàm trọng số. Nó sẽ khác không trên miền ảnh hưởng của nút x_i . Trong phương trình (3) chỉ các nút nằm trong miền ảnh hưởng mới được sử dụng. Kích thước miền ảnh hưởng của mỗi nút và cách chọn hàm trọng số đóng vai trò quyết định cho việc xác định các tham số $a(x)$ trong xấp xỉ MLS.

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)U$$

Với

$$B = [w_1(x-x_1)p(x_1) \quad w_1(x-x_2)p(x_2) \quad \dots \quad w_1(x-x_n)p(x_n)] \quad (6)$$

$$A = \sum_{i=1}^n w_i(x-x_i)p^T(x_i)p(x_i) \quad U^T = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n]$$

Thế (4) vào (1), ta thu được: (7)

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)U_i = \Phi(x)U$$

Với $\Phi(x)$ là hàm dạng MLS

$$j_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) (A^{-1}(x)B(x))_{ji} = p^T A^{-1} B_i$$

$$\Phi(x) = [j_1(x) \quad j_2(x) \quad \dots \quad j_n(x)]$$

Ở đây hàm dạng sẽ không thỏa mãn tính chất

delta Kronecker nên $u^h(x_i) \neq U_i$ sẽ không thỏa mãn điều kiện biên chính. Có nhiều cách khử điều kiện biên chính: sử dụng nhân tử Lagrange, sử dụng hàm phạt. Trong bài báo này chúng tôi sử dụng nhân tử Lagrange để khử điều kiện biên chính.

3. Hàm trọng số và miền ảnh hưởng:

Một cấu thành quan trọng của phương pháp EFG là hàm trọng số. Hàm trọng số phải dương và liên tục trong miền ảnh hưởng và thỏa mãn một số điều kiện sau:

- $w(x) > 0$ trong miền hỗ trợ
- $w(x) = 0$ ngoài miền hỗ trợ

Có nhiều cách chọn hàm trọng số, trong bài báo này sẽ chọn hàm spline bậc 3 (*The cubic spline weight function*)

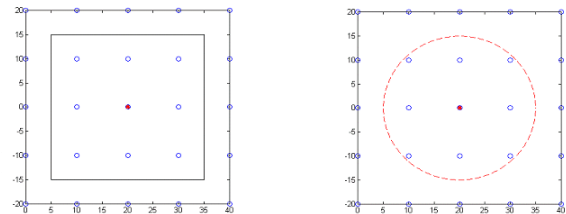
$$\omega_j(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r_j^2 + 4r_j^3 & \text{Khi } r_j \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r_j + 4r_j^2 - \frac{4}{3}r_j^3 & \text{Khi } \frac{1}{2} \leq r_j \leq 1 \\ 0 & \text{Khi } r_j \geq 1 \end{cases}$$

Với

$$r_j = \frac{\|x - x_i\|}{d_{\max} c_i}$$

Trong đó:

$2 \div 4 \quad d_{\max}$ là hệ số tỉ lệ thường chọn



Hình 1. Miền hỗ trợ chữ nhật và hình tròn

4. EFG và nhân tử Lagrange:

❖ Phân tích tĩnh học

Phương trình vi phân cân bằng cho bài toán đàn hồi 2D có dạng:

$$L^T s + b = 0 \text{ phương trình vi phân}$$

$u = \bar{u}$ điều kiện biên chính S_u (điều kiện biên chuyển vị)

$S_n = \bar{t}$ điều kiện biên tự nhiên S_t (điều kiện biên lực)

với L là ma trận vi phân, s là ma trận ứng suất, b là vector lực thể tích, u là vector chuyển vị, S là tensor ứng suất, n là vector pháp tuyến trên biên.

$$s = \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{yx} & s_{yy} \end{bmatrix}$$

Trên đây là phương trình dạng mạnh tức tạo ra lời giải chính xác bằng cách lấy tích phân, nhưng việc tính toán các tích phân đó thì gặp rất nhiều khó khăn. Do đó, ta dùng phương pháp số để giải. Có nhiều phương pháp số để giải, ở đây chúng tôi xây dựng hàm Lagrange

$$(11) \quad L = T - \Pi_s + W \quad (23)$$

Với T là động năng, Π_s là năng lượng biến dạng, W là công ngoại lực

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{u}^T \dot{u} d\Omega, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T s d\Omega, \quad W = \int_{\Omega} u^T b d\Omega + \int_{S_f} u^T t dS_f$$

Do hàm dạng không thỏa mãn tính chất delta Kronecker nên $u^h(x_i) \neq U_i$. Để khử điều kiện biên chính ta hiệu chỉnh hàm Lagrange bằng nhân tử Lagrange

$$\tilde{L} = L + \int_{S_u} 1^T (u - \bar{u}) dS_u \quad (14)$$

Trong đó: 1 là nhân tử Lagrange được xác định

$$1(x) = \sum_{i=1}^{n_i} N_i(s) 1_i \quad (15)$$

Với N là phép nội suy Lagrange chỉ phụ thuộc tọa độ các nút.

Theo nguyên lý Hamilton ta có dạng biến phân

$$\int_{\Omega} d(\sum_I B_I u_I)^T (c \sum_J B_J u_J) d\Omega - \int_{\Omega} d(\sum_I \Phi_I u_I)^T b d\Omega - \int_{S_f} d(\sum_I \Phi_I u_I)^T t dS_f - \int_{S_u} d[1^T (\sum_I \Phi_I u_I) - \bar{u}] dS_u - \int_{S_u} d(\sum_I \Phi_I u_I)^T 1 dS_u = 0 \quad (16)$$

Viết gọn lại

$$dU^T [KU + G\lambda - F] + d\lambda^T [G^T U - q] = 0 \quad (17)$$

Với

$$K_U = \int_{\Omega} B_I^T c B_J d\Omega \quad (18)$$

Với U và λ là hai biến độc lập tuyến tính nên được hệ phương trình

$$\begin{cases} KU + G\lambda - F = 0 \\ G^T U - q = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$G_{IJ}^T = - \int_{S_u} N_I^T \Phi_J dS_u \quad (21)$$

$$\begin{matrix} \Phi_I \\ B_I = L\Phi_I \end{matrix} = \begin{bmatrix} \Phi_I \\ j_{I,x} \\ \Phi_I \\ j_{I,y} \\ j_{I,y} \\ j_{I,x} \end{bmatrix} N_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$(20)$$

$$q_I = - \int_{S_u} N_I^T \bar{u} dS_u$$

$$F = \int_{\Omega} \Phi_I^T b_I d\Omega + \int_{S_f} \Phi_I^T t dS_f \quad (b_I^T = [b_{I,x} \ b_{I,y}])$$

$$(24)$$

♦ Phân tích dao động tự do

Dạng yếu Galerkin theo nguyên lý Hamilton cho bài toán động học

$$\int_{\Omega} d(\sum_I B_I u_I)^T (c \sum_J B_J u_J) d\Omega - \int_{\Omega} d[\delta^T ((\sum_I \Phi_I u_I) - \bar{u})] dS_u - \int_{S_f} d(\sum_I \Phi_I u_I)^T t dS_f + \int_{S_u} d[\rho \delta^T (\sum_I \Phi_I u_I)^T \bar{u}] d\Omega = 0 \quad (25)$$

Gọi phương trình dao động tự do có dạng $u(x,t) = u(x) \sin(\omega t + \phi)$ (26) Sử dụng các công thức (18) đến (22) và (26) thế vào (25) ta nhận được:

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix} = 0 \quad (27)$$

với $M = \int_{\Omega} \Phi^T \rho \Phi d\Omega$ (28)

Tính trị riêng và vector riêng bằng cách tính định thức ma trận:

$$\begin{vmatrix} K - \omega^2 M & G \\ G^T & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

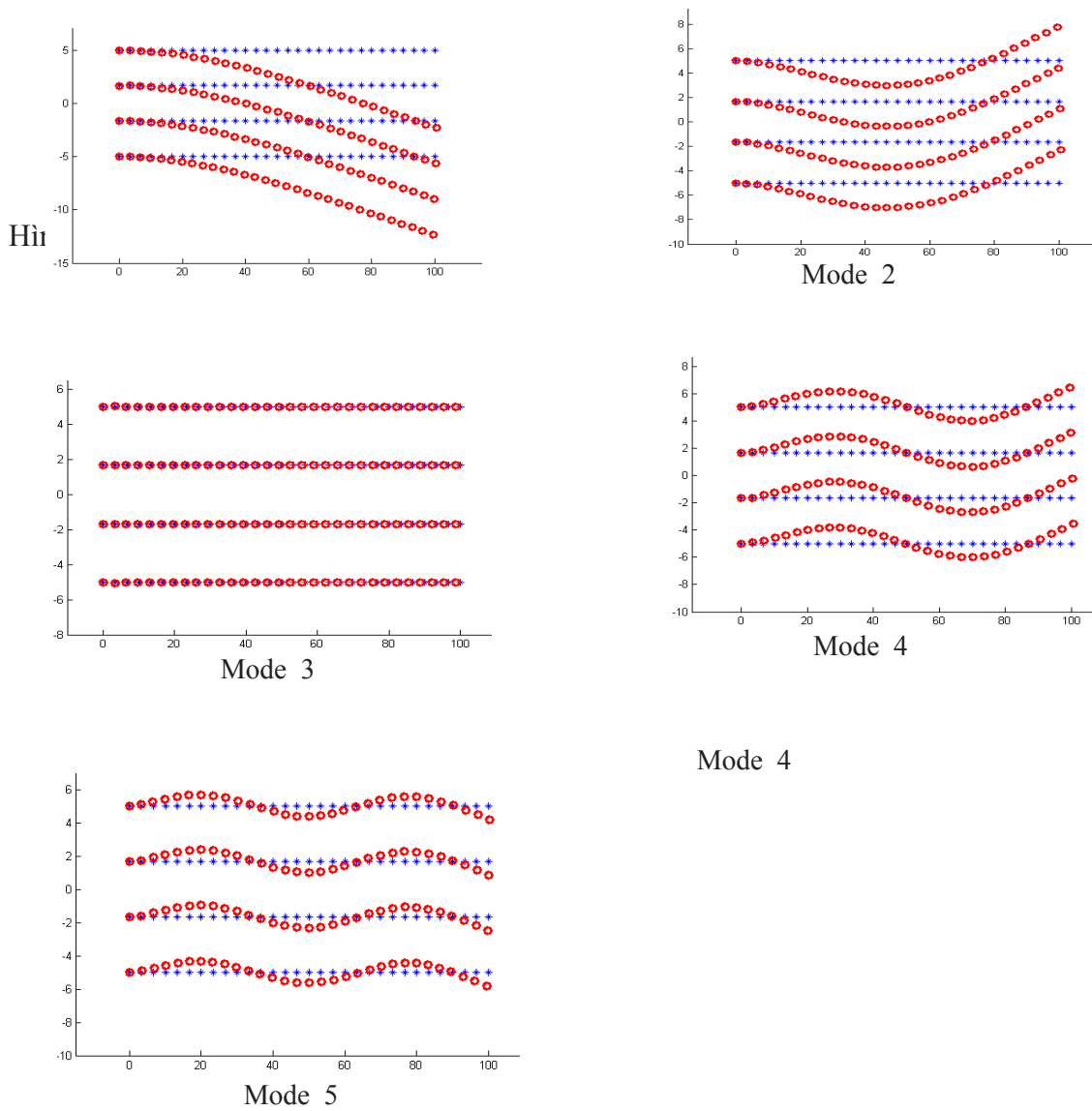
Tính trị riêng và vector riêng bằng cách tính định thức ma trận:

$$(29) \quad \begin{vmatrix} K - \omega^2 M & G \\ G^T & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5. Áp dụng

Cho bài toán dầm có các thông như sau:

- Chiều dài $L = 100$ m
- Chiều cao $D = 10$ m
- Bề dày $t = 1$ m
- Modul đàn hồi $E = 2 \times 10^4$ N/m²
- Hệ số Poisson $\nu = 0.3$
- Khối lượng riêng $\rho = 8 \times 10^{-10}$ Kg/m³



Hình 3. Dạng dao động của 5 Mode đầu

Bảng 1: Bảng so sánh giá trị 10 mode đầu tiên của EFG và FEM.

Mode	EFG (63 Nút)	FEM(Abaqus) (63 Nút)	D(%)
------	-----------------	-------------------------	------

1	823.54	870	5.34
2	4960.83	5199	4.58
3	12827.66	12830	0.02
4	13132.78	13640	3.72
5	23993.58	24685	2.80
6	36770.58	37477	1.88
7	38455.24	38378	0.20
8	50840.86	51322	0.94
9	63995.84	63584	0.65
10	65783.36	65731	0.08

Bảng 2: Bảng giá trị tần số 10 mode đầu của 1 số lưới với $d_{\max} = 2.5$

Mode	20x2	31x4	51x6	61x7
1	840	803	802	802
2	5051	4817	4814	4814
3	12522	12516	12515	12515
4	13332	12694	12681	12680
5	24275	23077	23047	23045
6	37028	35211	35151	35147
7	37551	37523	37518	37518
8	51123	48503	48399	48392
9	62527	62442	62398	62385
10	65975	62564	62434	62433

6. Kết luận

Trong quá trình phân tích các mode dao động khá ổn định, kết quả thu được về tần số được so sánh với lời giải FEM (phần mềm Abaqus) cho ta sai số tương đối tốt (không vượt 6%) cho thấy phương pháp là đáng tin cậy. Đặc điểm của phương pháp này là chỉ yêu cầu một hệ các điểm nút cùng với các miền ảnh hưởng của nó để xây dựng lời giải xấp xỉ mà không có liên hệ giữa các nút. Phương pháp EFG là một phương pháp không lưới nhưng lưới nền vẫn được sử dụng trong phép tính tích phân để xây dựng ma trận độ cứng, ma trận khối lượng.

Trong phương pháp EFG hàm chuyển vị $u(x)$ được xấp xỉ bởi $u^h(x)$. Do đó, một số nguyên nhân ảnh hưởng đến độ chính xác của lời giải:

- Mật độ nút phân bố trong miền khảo sát.
- Kích thước bán kính miền ảnh hưởng.
- Dạng hàm trọng số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đỗ Kiến Quốc, *Đàn Hồi Ứng Dụng*, NXB Đại Học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2002 .
- [2] Nguyễn Hoài Sơn, Vũ Như Phan Thiên, Đỗ Thanh Việt, *Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn Với Matlab*, NXB Đại Học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2001 .
- [3] Nguyễn Hoài Sơn, Lê Thanh Phong, Mai Đức Đãi, *Ứng Dụng Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn Trong Tính Toán Kết Cấu*, NXB Đại Học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh, 2006 .
- [4] G.R. Liu, *Mesh Free Methods*. CRC Press LLC, 2003.
- [5] G.R. Liu and Y.T.Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Published by Springer, 2005.
- [6] J. Dolbow and T. Belytschko (1998). *An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method*. *Northwestern University. IL 60208-3109, USA*,
- [7] Nguyen Vinh Phu (2006). *Meshless Methods and Their Computer Implementation Aspects*. *ENISE*
- [8] Petr Krysl, Ted Belytschko (2000). *A Library to Compute the Element Free Galerkin Shape Functions*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001) 2181-2205.