MỘT THỦ TỤC CHỈNH LÝ CHO SƠ ĐỒ NGOẠI SUY RICHARDSON TRONG ĐÁNH GIÁ SAI SỐ VÀ TỐC ĐỘ HỘI TỤ VỚI P-VERSION BẰNG PHÂN TÍCH PHẦN TỬ HỮU HẠN

Nguyễn Hoài Sơn

ABSTRACT

The goal of this study is to further investigate and to develop a more efficient way in the error estimate and the rate of the convergence for the adaptive mesh p-refinement procedure in the finite element analysis for two-dimensional and three-dimensional elastostatic mechanics problems. The oscillation of the stress field around singularity points is also considered in the refinement process. These oscillations will allow to determine the behaviors of the stress field through the element boundary. The exact energy norm $||u_{EX}||_E$ of the structure can be estimated by a procedure called Richardson's extrapolation. In this problem, we need to define the three unknowns $(||u_{EX}||_{E(\Omega)})^2$, k, and β which is dificult and requires higher cost of computation in the energy norm. To overcome this problem, a modification in the Richardson's extrapolation is proposed. The solution obtain will be more accurate. If the numerical perturbation and the residual errors should be decreased. Specially, the computation cost in particular will be not expensive.

Keywords: *Estimate, extrapolation, residual, refinement.*

I. GIỚI THIỆU

Trong nghiên cứu này, một thủ tục ngoại suy truyền thống của Richardson trong quá trình xác lập chuẩn năng lượng tiệm cận với năng lượng chính xác cần phải được chỉnh lý. Với lý do đó, một giải thuật được đề nghị nhằm mục đích giảm chi phí tính toán đồng thời xác định được ảnh hưởng các tham số nhiễu loạn của quá trình ngoại suy trong đánh giá sai số và tốc độ hội tụ nghiệm [1],[3],[6]. Ngoài ra, sự phát triển mô hình chỉnh lý này cho ta đánh giá một cách chính xác trường phân bố ứng suất và kiểm soát được sai số toàn cục [2],[4].

II. PHIẾM HÀM NĂNG LƯỢNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH SAI SỐ TRONG CHUẨN NĂNG LƯỢNG

Tìm $u \in V$ để các phương trình sau thỏa mãn điều kiện biên chính (Dirichlet):

$$B(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in V$$

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - L(u) \qquad (1)$$

$$B(e,v) = B(u_{EX},v) - B(u_{FE},v) = L(v) - B(u_{FE},v) \qquad (2)$$

với

$e = u_{EX} - u_{FE}$

$$||e||_{E(\Omega)} = ||u_{EX} - u_{FE}||_{E(\Omega)} \qquad (3)$$

J(u), $||e||_{E(\Omega)}$, u_{EX}, u_{FE}: tương ứng với phiếm hàm năng lượng, sai số chuẩn năng lượng, năng lượng chính xác, năng lượng xấp xỉ phần tử hữu hạn.

III. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ

- Tốc độ hội tụ đại số:

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u_{EX} - u_{FE}\|_{E(\Omega)} \le \frac{k}{N^\beta} \qquad (4)$$

- Tốc độ hội tụ dạng hàm mũ với cơ số e:

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u_{EX} - u_{FE}\|_{E(\Omega)} \le \frac{k}{\exp\left(\gamma N^\theta\right)} \qquad (5)$$

với *k, β, γ, θ, N*: các hằng số dương và N là số bậc tự do.

IV. MỘT CHỈNH LÝ SƠ ĐỒ NGOẠI SUY

- Nhiễu loạn số:

$$\bar{\delta} = u_i - u_R - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}^p - h_i^p} h_i^p$$

$$\bar{\delta} = O\left(h_i^{p+1}\right) \qquad (6)$$

- Hội tụ cho sai số toàn cục:

$$\left\|\bar{\delta}\right\| = \left\| u_i - u_R - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}^p - h_i^p} h_i^p \right\| \le \varepsilon \qquad (7)$$

- Nghiệm đánh giá:

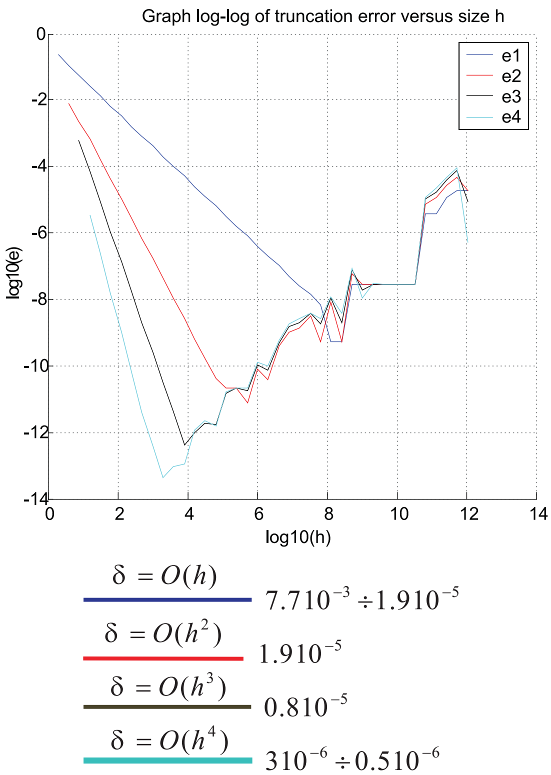
$$u_R = \frac{2^p u_{i+1} - u_i}{2^p - 1}$$

$$c = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i^p \left(\dfrac{1}{2^p} - 1 \right)} + O\left(h_i^{p+1}\right) \qquad (8)$$

- Đánh giá sai số u_{i+1}s

$$e\left(h_{i+1}\right) = \frac{u_{i+1} - u_i}{2^p - 1} + \bar{\delta} \qquad (9)$$

- Ảnh hưởng tham số nhiễu loạn [6]



Hình 1: Sai số cắt bỏ theo kích thước lưới h trong sơ đồ chỉnh lý

V. ÁP DỤNG CHO BÀI TOÁN LỖ HÌNH TRỤ 3-D

Một khối trụ chịu tải áp suất phân bố đều bên trong. Do tính chất đối xứng chỉ khảo sát ¼ hình trụ. Mô hình vật lý như hình 2. Lời giải chính xác cho bởi [5].

- Chuyển vị hướng kính:

$$u_R = -\frac{1}{2G\left(b^2 - a^2\right)} \left[\frac{\left(p_0 - p_i\right) a^2 b^2}{r} + \frac{(1-v)\left(p_0 b^2 - p_i a^2\right)}{1+v} r \right]$$

với $$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

- Chuyển vị theo z:

$$u_z = \frac{1}{G\left(b^2 - a^2\right)} \frac{v\left(p_0 b^2 - p_i a^2\right)}{1+v} (-z)$$

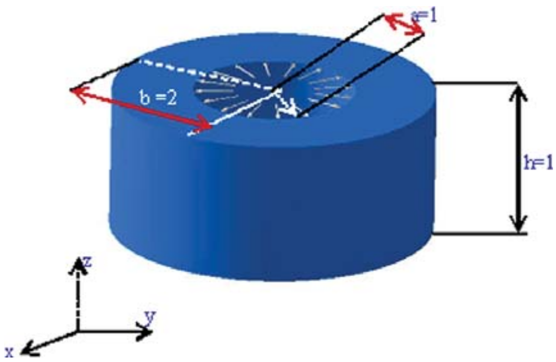
- Ứng suất hướng kính:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2}{\left(b^2 - a^2\right)} \frac{p_0 - p_i}{r^2} - \frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{b^2 - a^2}$$

- Ứng suất vòng:

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2}{\left(b^2 - a^2\right)} \frac{p_0 - p_i}{r^2} - \frac{p_0 b^2 - p_i a^2}{b^2 - a^2}$$

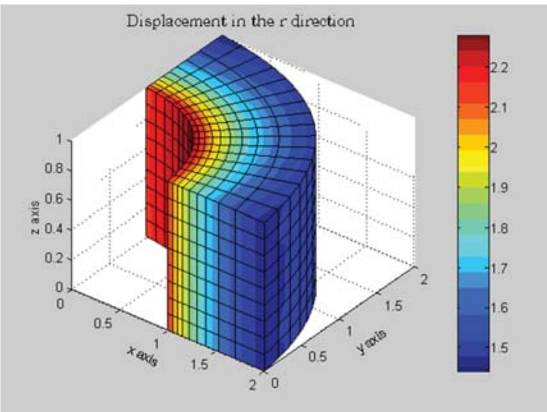
Môđun Young E =1000 N/m^2; hệ số Poisson v = 0.3; áp suất nội p_i = 1 N/m^2; áp suất ngoài p_0 = 0; bán kính trong a =1; bán kính ngoài b = 2; chiều cao h = 1.



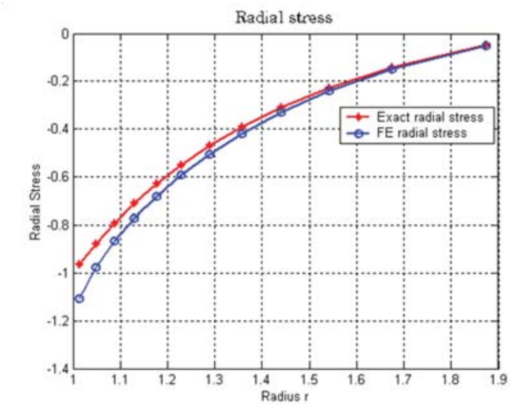
Hình 2: Mô hình vật lý hình trụ 3-D

Bậc hội tụ	Kích thước h	Tham số nhiễu loạn	Sai số đánh giá	Chỉ số hiệu dụng
O(h)	$1/2 \div 1/2^{40}$	0.1	$2.210^{-1} \div 1.910^{-5}$	0.889752232
$O(h^2)$	$1/2 \div 1/2^{40}$	0.03	$7.710^{-3} \div 1.510^{-5}$	0.977611095
$O(h^3)$	$1/2 \div 1/2^{40}$	$0.27.10^{-3}$	$0.610^{-3} \div 0.810^{-5}$	0.999927993
$O(h^4)$	$1/2 \div 1/2^{40}$	$0.87.10^{-4}$	$3.010^{-6} \div 0.510^{-6}$	0.999999759

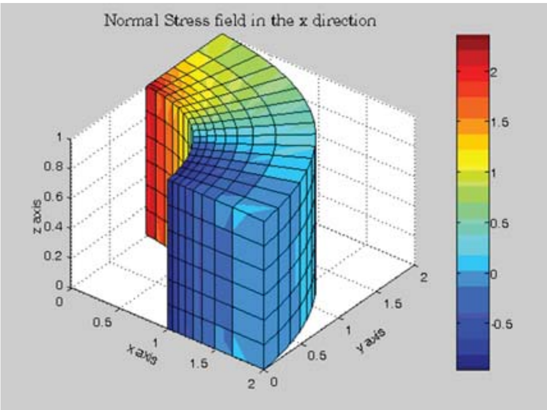
Bảng 1: Tham số nhiễu loạn, sai số đánh giá, chỉ số hiệu dụng theo bậc hội tụ



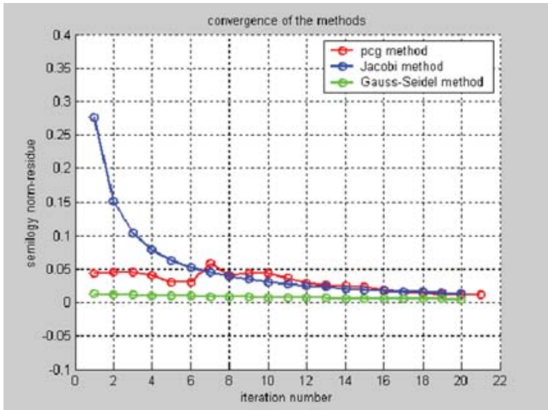
Hình 3a: Chuyển vị hướng kính



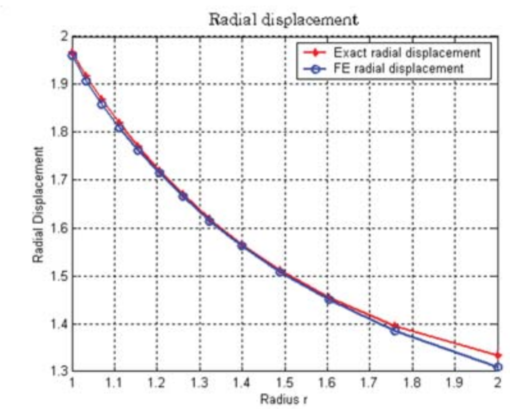
Hình 3b: Ứng suất hướng kính



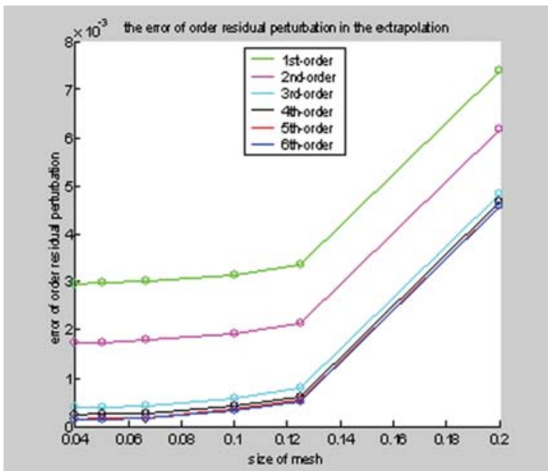
Hình 3c: So sánh chuyển vị hướng kính giữa FEM - chính xác



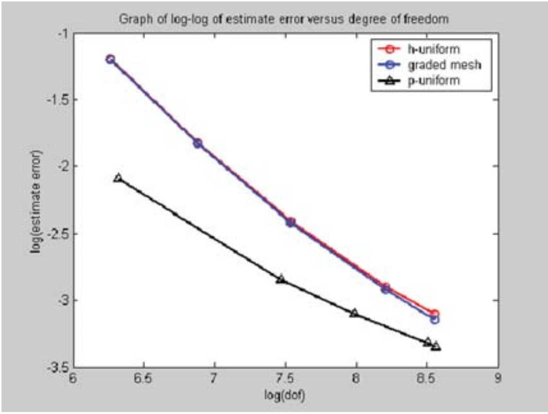
Hình 3d: So sánh ứng suất hướng kính giữa FEM - chính xác



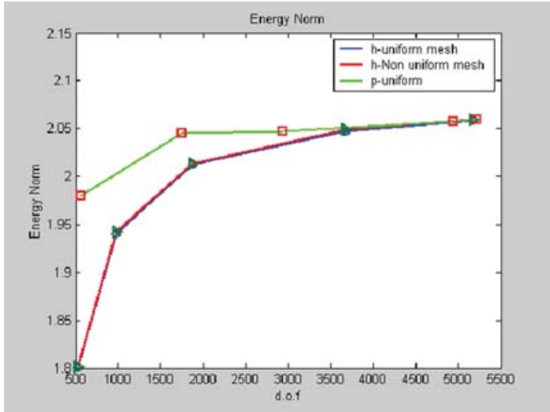
Hình 4a: Tốc độ hội tụ giữa các phương pháp lặp



Hình 4b: Sai số thặng dư của sơ đồ ngoại suy có chỉnh lý



Hình 4c: Sai số tương đối cho h và p-version



Hình 4d: Chuẩn năng lượng cho h và p-version

p	#dof	Chuẩn thặng dư tương đối của PCG	$k = \left\lvert \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right\rvert$	Chỉ số hiệu dụng của PCG	Thời gian CPU
1	225	0.000024487	9.1645e+003	0.9793	1.297
2	735	0.000625414	4.2889e+004	0.9903	2.063
3	1245	0.000840804	6.7971e+004	0.9923	4.391
4	2139	0.001131906	1.0378e+005	0.9938	15.281

Bảng 2: So sánh thời gian tính giữa các phương pháp lặp với bậc của hàm cơ sở p = 1, 2, 3, 4.

Lưới #	#dof	$\frac{1}{2}\lVert u_h \rVert^2_{E(\Omega)}$	$\lVert e_{es} \rVert$	η_{ex}	η_{es}	θ	r_c
1	525	1.8008	0.302	0.2539	0.2188	0.8615	0.580
2	975	1.9411	0.162	0.1790	0.1147	0.6408	
3	1875	2.0121	0.090	0.1251	0.0625	0.5003	0.545
4	3675	2.0476	0.055	0.0864	0.0376	0.4358	
5	5175	2.0580	0.045	0.0709	0.0299	0.4221	0.526

Bảng 3: So sánh sai số chuẩn năng lượng, chỉ số hiệu dụng giữa h và p-version, lưới đều cho h-version

Lưới #	#dof	$\frac{1}{2}\lVert u_h \rVert^2_{E(\Omega)}$	$\lVert e_{es} \rVert$	η_{ex}	η_{es}	θ
1	525	1.8018	0.301	0.2544	0.2195	0.8629
2	975	1.9423	0.161	0.1798	0.1154	0.6421
3	1875	2.0134	0.089	0.1263	0.0633	0.5013
4	3675	2.0488	0.054	0.0880	0.0384	0.4360
5	5175	2.0594	0.043	0.0731	0.0313	0.4283

Bảng 3: Lưới không đều cho h-version

Lưới #	p	#dof	$\frac{1}{2}\lVert u_h \rVert^2_{E(\Omega)}$	$\lVert e_{es} \rVert$	η_{ex}	η_{es}	θ
Lưới 1 (2x30x1) phần tử	1	558	1.9799	0.123	0.1529	0.0870	0.5694
	2	1749	2.0446	0.058	0.0919	0.0405	0.4409
	3	2940	2.0473	0.045	0.0884	0.0314	0.3553
	4	4947	2.0569	0.036	0.0749	0.0250	0.3350
	5	5220	2.0595	0.035	0.0707	0.0243	0.3444

Bảng 3: Lưới đều cho p-version

V. KẾT LUẬN

Chỉ thị sai số η cho h-version hay p-version cho phép đánh giá mức độ chính xác nghiệm trong phân tích phần tử hữu hạn so sánh với một sai số đề nghị trước TOL. Trong bài toán này, ta chọn trước TOL = 4%, bảng 3 và hình 4 chứng tỏ rằng sai số cho phép thỏa mãn chỉ sau 3 bước làm mịn như lưới 4 cho h-version, trong khi với p-version thu được kết quả mong muốn chỉ sau 1 bước làm mịn. Với yêu cầu sai số như trên, ta không cần làm mịn lưới hay tăng bậc đa thức khi số bậc tự do (3675 dofs) cho lưới đều h-version, (3675 dofs) cho lưới không đều h-version và (1749 dofs) cho p-version. Nó chứng tỏ rằng tốc độ hội tụ của việc làm mịn p-refinement tốt hơn h-refinement.

Hình 4 cho ta sai số thặng dư bậc cao trong sơ đồ ngoại suy có chỉnh lý trong chuẩn năng lượng tiệm cận nhanh tới nghiệm chính xác.

VI. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Szabo, B.A., Mesh design for the p-version of the finite element method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 55, pp. 181-197, 1986.

[2] Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. Adaptive tchniques in the finite element method. Communications in Applied Numerical Methods, 4:197-204, 1998.

[3] Cugnon, F. and Beckers, P. Error estimation for h and p methods, 8th Mechanical Engineering Chilean Congress, Concepcion, 27-30 october 2004, pp.737-744.

[4] Son, N. H., Dai, D. M. The error estimate for finite element analysis with h-p version in the linear elasticity 2-D, 3-D. International conference 8-2004 French-Vietnam.

[5] Rekatch, V. Probleme de la theorie de l’elasticite, Mir, Moscou, (1980).

[6] Shyy W. et al “Evaluation of Richardson extrapolation in computational fluid dynamics” Numerical heat transfer, Part B, 41: 139-164, 2004.