XÂY DỰNG TIÊU CHUẨN GÓC BÉ NHẤT TRONG ĐÁNH GIÁ SAI SỐ VÀ TỐC ĐỘ HỘI TỤ CỦA PHẦN TỬ TAM GIÁC TRONG PHÂN TÍCH CHẤT LƯỢNG LƯỚI PHẦN TỬ HỮU HẠN

Nguyễn Hoài Sơn

ABSTRACT:

With the increasing use of finite element analysis programs, the development of a reliable and robust modeling procedure is necessary for engineers who do not possess extensive numerical expertise. An adaptive mesh refinement finite element method, also called a refinement method, is the subject of extensive investigation with the objective of obtaining solutions with pre-specified accuracy with minimum cost of model preparation and computation. In a refinement procedure, a finite element mesh is sequentially upgraded in such a way that the discretization error in the final solution is reduced to a desired level. The computational effectiveness of a refinement method depends on several factors including the type of refinement scheme, error estimator used, equation solver used, and computer programming technique. At present, some commercial finite element programs have incorporated a refinement procedure that provides promised accuracy of final results. However, computational effectiveness of those programs did not reach yet an optimum point. The goal of this study is to further investigate and to develop a more efficient adaptive mesh p-refinement procedure based on a criteria of the minimum angle for the triangular element in the quality finite element mesh for two-dimensional elastostatic mechanics problems.

Keywords *Refinement, Adaptive, Robustness, Singularity.*

I. GIỚI THIỆU

Trong nghiên cứu này, một thủ tục làm mịn thích nghi kiểu p với một tiêu chí đánh giá theo chỉ thị sai số trong chuẩn năng lượng dựa trên tiêu chuẩn góc bé nhất đã được đề nghị. Nhiều tiêu chí đánh giá sai số cho các bài toán kỹ thuật đặc biệt bài toán cơ học vật rắn biến dạng trong phân tích phần tử hữu hạn mang lại tính hiệu quả của phương pháp [1], [3]. Điểm quan tâm trong bài báo này, phân tích bất liên tục trường ứng suất tại các điểm suy biến của vật thể, từ đó cho ta đánh giá sự hội tụ và đường hướng điều khiển sai số trong quá trình làm mịn lưới hợp lý [4],[5],[6] cũng như cung cấp cho ta những thông tin giá trị trong kiểm tra sự hội tụ của trường ứng suất làm mịn.

1. Phiếm hàm năng lượng và phương trình sai số trong chuẩn năng lượng

Tìm $u \in V$ để các phương trình sau thỏa mãn điều kiện biên chính (Dirichlet):

$$B(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in V$$

$$J(u) = \frac{1}{2}B(u,u) - L(u) \tag{1}$$

$$B(e,v) = B(u_{EX},v) - B(u_{FE},v) = L(v) - B(u_{FE},v) \tag{2}$$

với

$$e = u_{EX} - u_{FE}$$

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u_{EX} - u_{FE}\|_{E(\Omega)} \tag{3}$$

$J(u), \|e\|_{E(\Omega)}, u_{EX}, u_{FE}$: tương ứng với phiếm hàm năng lượng, sai số chuẩn năng lượng, năng lượng chính xác, năng lượng xấp xỉ phần tử hữu hạn.

2. Tiêu chuẩn hội tụ

- Tốc độ hội tụ đại số:

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u_{EX} - u_{FE}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{N^{\beta}} \quad (4)$$

- Tốc độ hội tụ dạng hàm mũ với cơ số e:

$$\|e\|_{E(\Omega)} = \|u_{EX} - u_{FE}\|_{E(\Omega)} \leq \frac{k}{\exp(\gamma N^{\theta})} \quad (5)$$

với $k, \beta, \gamma, \theta, N$: các hằng số dương và N là số bậc tự do.

3. Sự suy biến hình học

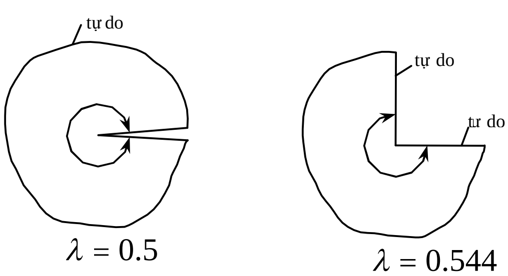
$$\beta = \frac{1}{2}\min(p, \lambda), \quad \lambda = \frac{\pi}{\omega}, \quad (6)$$

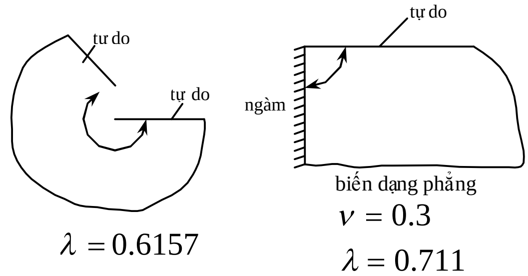
p: bậc của hàm cơ sở.

ω: góc trong lớn nhất trên biên $\partial\Omega$ của vật thể

Bảng 1: Mức độ suy biến theo bậc của hàm cơ sở

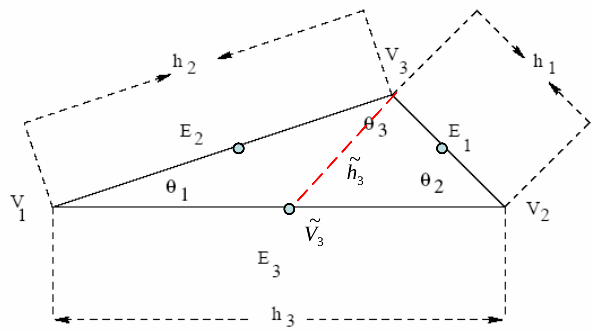
$\omega = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$\lambda = 2$	$O(N^{-1/2})$	$O(N^{-1})$	$O(N^{-1})$
$\lambda = 1.5$	$O(N^{-1/2})$	$O(N^{-3/4})$	$O(N^{-3/4})$
$\lambda = 0.5$	$O(N^{-1/4})$	$O(N^{-1/4})$	$O(N^{-1/4})$





Hình 1: Dạng suy biến hình học

4. Phân tích tính hiệu quả của dạng phần tử tam giác



Hình 2: Cạnh và góc của phần tử tam giác

$$0 < h_1 \leq h_2 \leq h_3 \quad (7)$$

$$0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$$

$$0 < h_1 \leq \frac{h_3^2}{A} \leq \frac{4}{\sin\theta_1} \quad (8)$$

$$2A = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

➢ Tìm $\theta_{\min}$ sao cho $\sin\theta_1 < \sin\theta_{\min}$

- Dùng luật cosin, ta có:

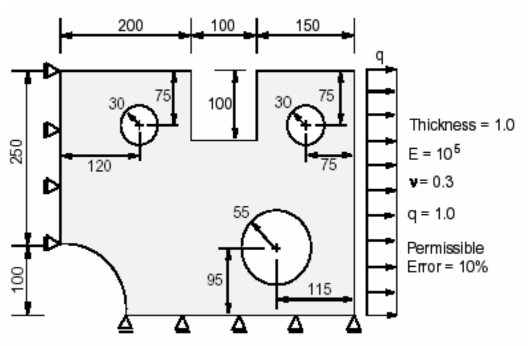
$$\tilde{h}_i^2 = \frac{1}{2}\left(h_{i+1}^2 + h_{i+2}^2 - \frac{h_i^2}{2}\right), \quad i = 1,2,3 \quad (10)$$

Để thu được một lưới tam giác mịn với sai số mong muốn cỡ $\tau \approx 3\% \div 4\%$ ngưỡng của góc bé nhất theo chứng minh đề nghị trên là $\theta_{\min} \approx 25^0$.[2]

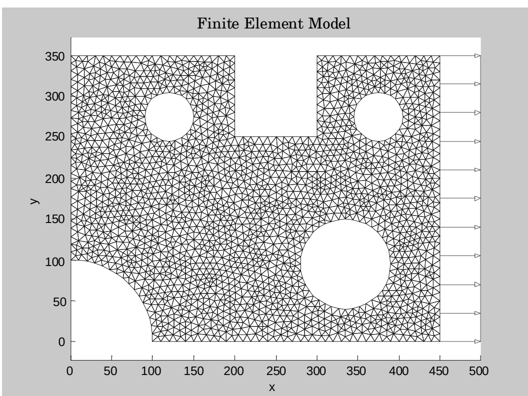
5. Áp dụng số

- Tấm đàn hồi có lỗ

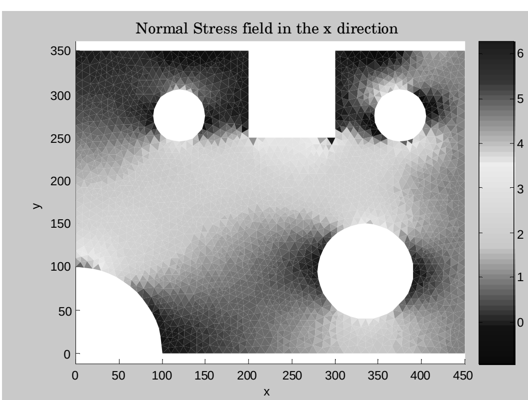
Mô hình bài toán biến dạng phẳng cho tấm đàn hồi có khoét lỗ với các kích thước và điều kiện biên (hình 3). Một số kết qủa bài toán này được nghiên cứu bởi Baehmann (1989) và Cavalcante Neto (2000). Trong mô hình phần tử hữu hạn chúng tôi sử dụng lưới tam giác với hàm cơ sở bậc cao hierarchie.



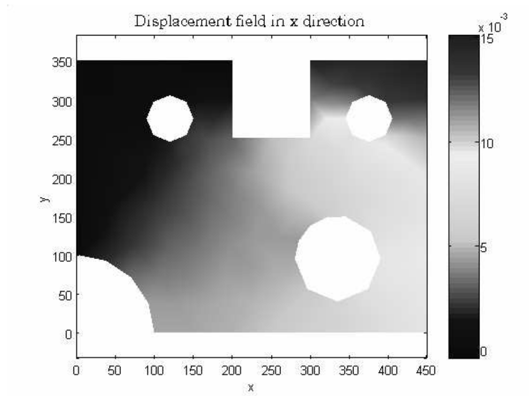
Hình 3. Tấm có khoét lỗ



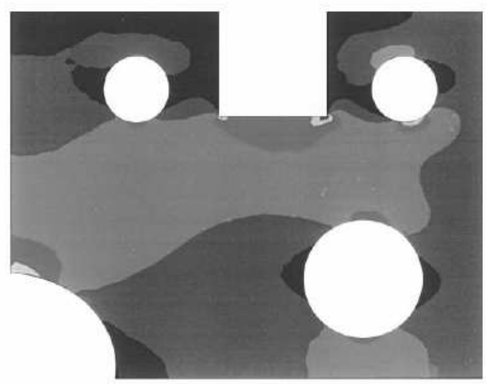
Hình 4a: Mô hình phần tử hữu hạn



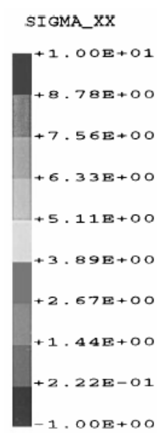
Hình 4b: Trường ứng suất pháp theo phương x



Hình 4c: Trường chuyển vị theo phương x



Hình 4d: Trường ứng suất pháp theo phương x [G.H.Paulino] với phần mềm Festa



Tham chiếu

➢ ***h-version***

#dof	chuẩn năng lượng $\frac{1}{2}\|U\|^2$	$\|e_{es}\|$	η_{es}	θ	CPU time(s)
324	1.53896741	0.427945	0.305137	0.8219	1.672
382	1.57066927	0.389146	0.277975	0.7954	2.219
510	1.59908889	0.350735	0.251178	0.7636	3.907
560	1.60910783	0.336149	0.241015	0.7499	4.765
774	1.63780383	0.290345	0.209095	0.6996	10.828
1174	1.67180703	0.224270	0.162871	0.6032	33.172
2028	1.692116327	0.173170	0.126795	0.5043	169.28
4504	1.716601025	0.074192	0.055441	0.2427	521.234

Bảng 2: Chuẩn năng lượng – sai số tương đối đánh giá – chỉ số hiệu dụng - thời gian tính theo bậc tự do (DOF)

➢ ***p-version***

p	#dof	số phần tử	chuẩn năng lượng $\frac{1}{2}\|U\|^2$	$\|e_{es}\|$	η_{es}	θ	CPU (times)
1	286	228	1.5585	0.43897	0.3105	0.8752	3.765
2	1032	228	1.6814	0.264196	0.1894	0.7366	7.438
3	2234	228	1.7265	0.157162	0.1145	0.5437	25.375
4	3892	228	1.7441	0.084261	0.0623	0.3281	80.359

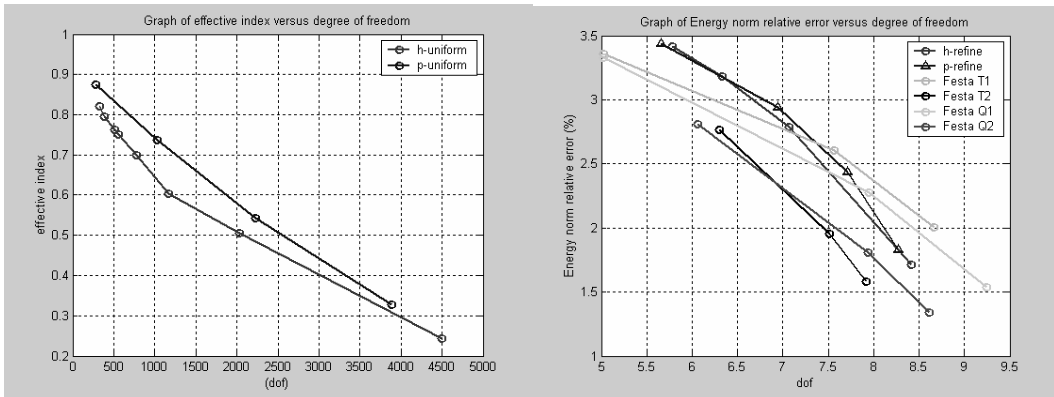
Bảng 3: Sai số tương đối đánh giá và chỉ số hiệu dụng theo bậc tự do (DOF)

Tính toán				phần mềm FESTA [5]			
Làm mịn- h		Làm mịn- p		Tam giác tuyến tính (T1)		Tam giác bậc 2 (T2)	
#dof	η_{es} (%)	#dof	η_{es} (%)	#dof	η_{es} (%)	#dof	η_{es} (%)
324	30.51	286	31.05	152	28.71	546	15.91
560	24.10	1032	18.94	1925	13.56	1842	7.07
1174	16.28	2234	11.45	5782	7.45	2758	4.85
4504	5.54	3892	6.23				

Bảng 4: So sánh sai số tương đối đánh giá theo kiểu làm mịn h, p và phần mềm FESTA với phần tử tam giác theo bậc tự do (DOF)

Tính toán				phần mềm FESTA [5]			
Làm mịn- h		Làm mịn -p		tứ giác tuyến tính(Q1)		tứ giác bậc 2 (Q2)	
#dof	η_{es} (%)	#dof	η_{es} (%)	#dof	η_{es} (%)	#dof	η_{es} (%)
324	30.51	286	31.05	152	27.79	428	16.56
560	24.10	1032	18.94	2846	9.72	2808	6.10
1174	16.28	2234	11.45	10346	**4.66**	5494	**3.83**
4504	**5.54**	3892	**6.23**				

Bảng 5: So sánh sai số tương đối đánh giá theo kiểu làm mịn h, p và phần mềm FESTA với phần tử tứ giác theo bậc tự do (DOF)



Hình 5: Đánh giá sai số kiểu log-log theo bậc tự do (DOF) (trái), chỉ số hiệu dụng theo bậc tự do (DOF) cho cả hai kiểu làm mịn h và p

II. KẾT LUẬN

- Bảng 4 và 5 biểu thị so sánh sai số đánh giá tương đối giữa tính toán có chỉnh lý và phần mềm FESTA theo luật SPR (superconvergent patch recovery [3]) và luật REP (recovery Equilibrium patches [5]).
- Hình 5 cho thấy kiểu phần tử tam giác và tứ giác bậc 2 với kiểu làm mịn p và h trong đánh giá sai số tương đối và tốc độ hội tụ thì tốt hơn kiểu phần tử tam giác và tứ giác tuyến tính T1, Q1.

Dùng tiêu chuẩn góc bé nhất đề nghị trong bài báo này để đánh giá tốc độ hội tụ và sai số tương đối trong chuẩn năng lượng cho ta nhận được các kết quả phù hợp như kết qủa cho bởi phần mềm FESTA bảng 4, 5.

III. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Szabo, B.A., Mesh design for the p-version of the finite element method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 55, pp. 181-197, 1986.
2. Beckers, P. and Son, N. H. 2D error estimation and mesh refinement using improved R.E.P (2003). method, Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, Edited by P. Ladeveze and J. T. Oden. (1998).
3. Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. Adaptive tchniques in the finite element method. Communications in Applied Numerical Methods, 4:197-204, 1998.
4. Cugnon, F. et Beckers, P. Error estimation for h and p methods, 8th Mechanical Engineering Chilean Congress, Concepcion, 27-30 october 2004, pp.737-744.
5. Paulino, G. H. et al. A Methodology for adaptive finite element analysis towards an integrated computational environment Computational Mechanics 23 (1999) 361-388 @ Springer-Verlag 1999.
6. Son, N. H., Dai, D. M. The error estimate for finite element analysis with h-p version in the linear elasticity 2-D, 3-D. International Conference 8-2004 French-Vietnam.